

CÁLCULO COMBINATÓRIO

1. PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES SOBRE CONJUNTOS

→ dados conjuntos A e B,

1.1. Interseção e união de conjuntos

$$\rightarrow A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$$

→ O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto:
 $\emptyset \subset A$ & $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$

$$\rightarrow A \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A} \quad \& \quad x \in A \Rightarrow x \in B \Leftrightarrow x \notin B \Rightarrow x \notin A$$



Interseção	Propriedade	União
$A \cap B = B \cap A$	Comutatividade	$A \cup B = B \cup A$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Associatividade	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$A \cap A = A$	Idempotência	$A \cup A = A$
$A \cap U = U \cap A = A$	Elemento neutro	$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$
$A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$	Elemento absorvente	$A \cup U = U \cup A = U$
$\bar{A} \cap A = \emptyset$	1.º Def. de Complementar	$\bar{A} \cup A = U$
$A \setminus B = A \cap \bar{B}$	Exclusão	$\bar{A} \setminus \bar{B} = \bar{A} \cap B$

→ Leis de De Morgan:

$$\begin{aligned} \bullet \overline{A \cup B} &= \bar{A} \cap \bar{B} \quad (= \sim(A \cup B)) \\ \bullet \overline{A \cap B} &= \bar{A} \cup \bar{B} \quad (= \sim(A \cap B)) \end{aligned}$$

→ atenção:

$$\begin{aligned} \bullet A \cup (A \cap B) &= A \\ \bullet \bar{B} \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) &= \bar{B} \end{aligned}$$



1.2. Produto cartesiano:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

→ se $A=B$, então $A \times B = A^2$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 & \quad \mathbb{R}^3 \quad \dots \quad \mathbb{R}^n \\ \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} & \end{aligned}$$

• Propriedade distributiva do p.c. (união):

$$\begin{aligned} \rightarrow A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C) \\ \rightarrow (A \cup C) \times A &= (B \times A) \cup (C \times A) \end{aligned}$$

2. CÁLCULO COMBINATÓRIO

→ dois conjuntos A e B com o mesmo cardinal ($\#A = \#B$) → equipotentes

1.1. Princípios da contagem

→ Princípio da multiplicação: $\#(\overbrace{A \times B}^{\text{produto cartesiano}}) = \#A \times \#B$

→ exemplo da Mariana:

A Mariana tem 20 calças e 30 T-shirts. De quantas maneiras diferentes se pode vestir usando um par de calças e uma T-shirt: $20 \times 30 = 600$

A Mariana tem 2 casacos: $20 \times 30 \times 2 = 1200$

→ Princípio da adição: se $A \cap B = \emptyset$, então $\#(A \cup B) = \#A + \#B$

→ exemplo de aplicação:

Queremos formar uma comissão de 4 elementos da turma 12ºA1 com pelo menos 3 raparigas. Quantas comissões podemos ter:

$$\begin{aligned} & \text{n.º de comissões com} & + & \text{n.º de comissões com} \\ & 3 \text{ raparigas e } 1 \text{ rapaz} & & 4 \text{ raparigas} \end{aligned}$$

→ Princípio fundamental da contagem: $\#(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \#A_1 \times \#A_2 \times \dots \times \#A_n \quad (p \in \mathbb{N})$

②

- **Arranjos completos** (ou com repetição) $\rightarrow$ de n elementos k a k $\xrightarrow{n \in \mathbb{N}}$
 - $\rightarrow$ seqüências de k elementos de A
 - $\rightarrow$ n° de arranjos completos: ${}^n A_k = n^k$
 - $\rightarrow$ exemplo: ${}^{14} A_5 = 14^5 = 14 \times 14 \times 14 \times 14 \times 14$

- **Arranjos simples** (ou sem repetição)
 - $\rightarrow$ seqüências de p a p de elementos distintos escolhidos no conjunto A
 - $\rightarrow$ n° de arranjos simples: ${}^n A_p = \frac{n!}{(n-p)!}$
 - $\rightarrow$ exemplo: ${}^{10} A_3 = 10 \times 9 \times 8$

$$= \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!}$$

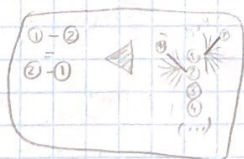
- **Permutações**
 - $\rightarrow$ $(n!)$ (n fatorial) $= n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1 \Rightarrow$ n° de formas diferentes de ordenar os n elementos
 - $\rightarrow$ Propriedades:
 - $0! = 1$ (por convenção) $\rightarrow {}^5 A_5 = \frac{5!}{0!} = 5!$
 - $n! = n \times (n-1)!$
 $\rightarrow n! = n \times (n-1) \times (n-2)! \dots$
 - $\frac{4!}{3!} = \frac{4 \times 3!}{3!} = 4$
 - $\rightarrow$ **Permutações com repetição:**

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$
 - $\rightarrow$ exemplo: 3x Amarelo; 2x Verde; 4x Preto; 1 Costão
 seqüências diferentes de 10 peças: $\frac{10!}{3! 2! 4!}$

- **N° de subconjuntos de um conjunto finito**
 - $\rightarrow$ Dado conjunto E ,
 - $\rightarrow$ conjunto das partes de E (todos os seus subconjuntos): $\mathcal{P}(E)$
 - $\rightarrow$ exemplo:
 - conjunto $E = \{a, b, c\}$
 - $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$
 - $\# \mathcal{P}(E) = 8$

- **Cardinal de $\mathcal{P}(E)$** (com n elementos) $\xrightarrow{n \in \mathbb{N}}$
 - $\rightarrow$ número de subconjuntos de E é 2^n , ou seja, $\# \mathcal{P}(E) = 2^{\#E}$

- $\rightarrow$ exemplo: $E \rightarrow$ 1023 subconjuntos não vazios
 $\# \mathcal{P}(E) = ?$ quantos desses subconjuntos têm cardinal igual a 2? 45
 quantos subconjuntos há com 3 elementos? ${}^{10} C_3$
 $\# \mathcal{P}(E) = 1023 + 1 = 1024$ $2^n = 1024$
 $\rightarrow n = 10$ (tentativa-erro)
 $\#E$



$$({}^{10} C_2) = \frac{10 \times 9}{2!} = 45$$

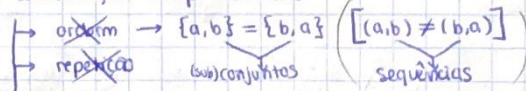
$$\frac{10 \times 9 \times 8}{3!} = \frac{{}^{10} A_3}{3!} = {}^{10} C_3$$

Combinatórias

→ Dado um conjunto A finito, com n elementos,

$${}^n C_p = \frac{{}^n A_p}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)! p!}$$

n combinações de p elementos



número inteiro por ser contagem de subconjuntos

Permutações circulares

$$\frac{n!}{n} = \frac{n(n-1)!}{n} = (n-1)!$$

nº de elementos

→ exemplo: quantas maneiras diferentes se pode colorir o círculo com 8 cores diferentes?

problema:

$$\begin{array}{c} 8 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \\ 7 \quad 8 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \\ 6 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 7 \quad 8 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{array} \quad \frac{8!}{8} //$$



SÍNTESE:

CÁLCULO COMBINATÓRIO

ordem

Interessa a ordem

Não interessa a ordem

O número de objetos é igual ao número de posições?

Combinações

$${}^n C_p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Permutações

Simples

$$P_n = n!$$

Com repetição

$$P = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots}$$

Circulares

$$P = \frac{n!}{n}$$

Arranjos

Completos (com repetição)

$${}^n A_p = n^p$$

Simplex (sem repetição)

$${}^n A_p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Nº sequências de 4 letras

$${}^{23} A_4 = 23^4$$

8 atletas; 3 medalhas

$${}^8 A_3 = \frac{8!}{5!} = 8 \times 7 \times 6$$

5 pessoas em fila

anagrama de CORRISO

$$\frac{7!}{2! 2! 2!}$$

5 pessoas em mesa circular

$$\frac{5!}{5}$$

grupos de 5 pessoas de 30

$${}^{30} C_5 = \frac{30!}{5! 25!}$$

1º: ordem
2º: nº de objetos = / ≠ nº de posições

3º: repetição

exemplos:

4

EXERCÍCIOS de aplicação:

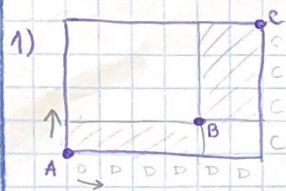
- 1º: info dada
- 2º: questão
- 3º: responder

Números:

- 1º: Escolher quais são.
- 2º: Escolher onde se posicionam.

Número de diagonais em figura geom: $nC_2 - n$ (n = nº de lados)

Número de vetores em fig. geom: nº lados + 2x nº diagonais

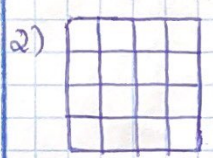


1.1. $A \rightarrow C$? $D \times 6$ & $C \times 4$

$$\frac{10!}{6!4!}$$

1.2. $A \rightarrow B \rightarrow C$?

$$\frac{A \rightarrow B}{\frac{5!}{4!}} \quad \& \quad \frac{B \rightarrow C}{\frac{5!}{2!3!}}$$



2.1. $9 \square$
 $3 \square$

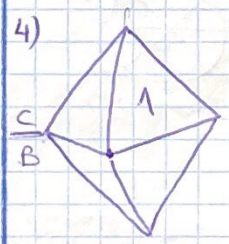
$$16C_9 \times 3C_3$$

2.2. $4 \square$ (diagonal)
total $16A_4 - (2 \times 4!)$
diagonal



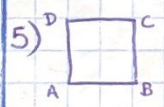
4 cores
Quadrados adjacentes não podem ser da mesma cor?

$$4 \times 3 \times 3 \times 3 = 4 \times 3^3$$



Numerao restantes faces de 2 a 8. Pelo menos 3 faces em C têm números ímpares?

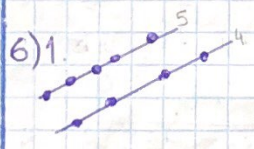
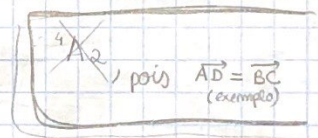
caso de 4 em C: $\frac{3!}{3!} \times 4!$
caso de 3 em C: $3! \times 4!$
caso de 2 em C: $2! \times 4!$
caso de 1 em C: $1! \times 4!$



vetores (não nulos)?

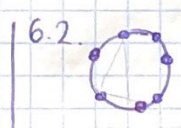
$$n^\circ \text{ lados} + (n^\circ \text{ diagonais} \times 2)$$

$$4 + (2 \times 2) = 8$$



Circunferências 3 pontos?

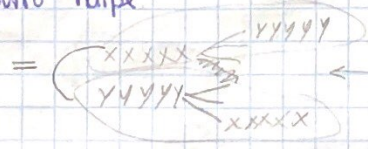
$$\left(\frac{5C_3 \times 4}{\text{caso 1}} \right) + \left(\frac{4C_3 \times 5}{\text{caso 2}} \right)$$



(7) Triângulos 3 pontos? $7C_3$

7) Baralho de 40 cartas
Conjuntos de 5 cartas de um naipe e 5 de outro naipe

$$\frac{10C_5 \times 4}{\text{naipes 1}} \times \frac{10C_5 \times 3}{\text{naipes 2}}$$



9) 4 ♀ & 2 ♂
- mesma recôndia e os 2 ♂ separados?

$$\frac{4! \times 2!}{4}$$

8) 3 livros de Mat. } arrumar na prateleira
6 livros diferentes

8.1. 3 livros de Mat. juntos

Supercadeira de 3: $9 - 2 = 7$

$$\frac{7 \times 3!}{\text{Mat.}} \times \frac{6!}{\text{outros}}$$

8.2. Não haja 2 livros de Mat. juntos

$$9 - 3 \rightarrow \frac{6!}{\text{Mat.}} \times \frac{3!}{\text{restantes}}$$

3. TRIÂNGULO DE PASCAL. PROPRIEDADES DAS COMBINAÇÕES.

5

3.1. Propriedades das combinações.

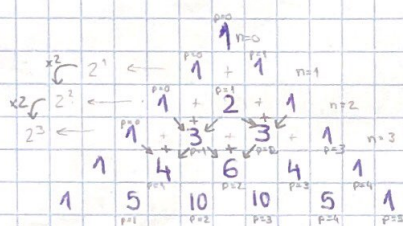
$$\begin{aligned} \rightarrow {}^nC_n &= {}^nC_0 = 1 \dots \dots \dots {}^5C_5 = {}^5C_0 = 1 \\ \rightarrow {}^nC_p &= {}^nC_{n-p} \quad (\text{lei da simetria}) \dots \dots \dots {}^5C_3 = {}^5C_2 \\ \rightarrow {}^nC_1 &= {}^nC_{n-1} = n \dots \dots \dots {}^5C_4 = {}^5C_1 \end{aligned}$$

3.2. Triângulo de Pascal

→ Fórmula de Pascal: ${}^{n+1}C_{p+1} = {}^nC_p + {}^nC_{p+1}$ $*$
($p < n$)

→ Propriedade: ${}^nC_0 + {}^nC_1 + \dots + {}^nC_n = 2^n$ (ou $\sum_{i=0}^n {}^nC_i = 2^n$)
↓ elementos, no total, de uma linha (soma)

• Triângulo de Pascal:



${}^nC_0 = 1 \rightarrow 1^\circ \text{ elemento!}$
 $n = x \rightarrow x+1 \text{ linha } (n=12 \rightarrow 13^\circ \text{ linha})$

- exemplo:

a) $2^n C_n + 2^n C_{n+1} = 2^{n+1} C_5 \Leftrightarrow 2^{n+1} C_{n+1} = 2^{n+1} C_5 \Rightarrow$
 $\Rightarrow n+1=5 \vee (2n+1)-5=5 \Leftrightarrow \frac{n=4}{\text{verificação: } {}^9C_5 = {}^9C_4} \vee \frac{n=5}{{}^{10}C_6 = {}^{10}C_5}$

b) * verificação: ${}^nC_p + {}^nC_{p+1} = \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} =$
 $= \frac{n!}{p!(n-p)(n-p-1)!} + \frac{n!}{(p+1)p!(n-p-1)!} = \frac{(p+1)n! + (n-p)n!}{(p+1)!(n-p)!} = \frac{n!(p+1+n-p)}{(p+1)!(n-p)!} =$
 $= \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n+1-p-1)!} = {}^{n+1}C_{p+1}$

c) $2^{12} = 4096 \rightarrow$ soma dos elementos da linha 12

soma dos elementos das linhas anteriores ($n=0 \rightarrow n=11$) 12 linhas } p.g. = $a_1 \times \frac{1-R^n}{1-R}$ $R=2$ $N=12$
 $1 \times \frac{1-2^{12}}{1-2} = 4095$

d) $\sum_{k=1}^{15} {}^{16}C_k$ faltam: $\frac{{}^{16}C_0}{1} + \frac{{}^{16}C_{16}}{1} + x = 2^{16} \Leftrightarrow x = 2^{16} - 2$

• Binômio de Newton

$(x+y)^n = x^n + {}^nC_1 x^{n-1} y + {}^nC_2 x^{n-2} y^2 + \dots + {}^nC_{n-1} x^1 y^{n-1} + y^n$

$\sum_{k=0}^n {}^nC_k x^{n-k} y^k = (x+y)^n$

Números nC_k
coeficientes binômicos

⑥

• Termo de ordem $p+1$

$$T_{p+1} = {}^nC_p x^{n-p} y^p$$

→ exemplo: $(2x - x^2)^9$

1º termo: $T_1 = (2x)^9$
2º termo: $T_2 = {}^9C_1 (2x)^8 (-x^2)$

1º termo: $T_{0+1} = {}^nC_0 x^n y^0 = x^n$ // 2º termo: $T_{1+1} = {}^nC_1 x^{n-1} y$

- exercícios: $(x^3 - \frac{3}{x})^8$

a) termo central:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & -3 & 4 & 5 & -8 \\ \hline 4 & & 4 & & 4 \end{array}$$

→ $p=4$
 $T_5 = {}^8C_4 (x^3)^{8-4} \left(-\frac{3}{x}\right)^4 = 70 \times x^{12} \times \left(\frac{81}{x^4}\right) = 5670 \frac{x^{12}}{x^4} = 5670 x^8$

b) termo independente de x :

expressão geral:

$$T_{p+1} = {}^8C_p (x^3)^{8-p} \left(-\frac{3}{x}\right)^p = {}^8C_p (-3)^p \frac{x^{24-p}}{x^p} = {}^8C_p (-3)^p \frac{x^{24}}{x^{2p}} = {}^8C_p (-3)^p \frac{x^{24-2p}}{x^{2p}}$$

$24-2p=0 \Leftrightarrow 2p=24 \Leftrightarrow p=12$
 $T_{6+1} = T_7 = {}^8C_6 (x^3)^{8-6} \left(-\frac{3}{x}\right)^6 = 28 \times \frac{729}{x^6} = 20412$

c) termo de grau 12:

$24-2p=12 \Leftrightarrow 2p=12 \Leftrightarrow p=6$
 $T_4 = T_{3+1} = {}^8C_3 x^{15} \left(-\frac{3}{x}\right)^3 = 56 \times (-27) x^{12} = -1512 x^{12}$

d) soma dos coeficientes dos seus termos:

$(x^3 - \frac{3}{x})^8$
→ coeficientes numéricos: 1, -3 → $(1-3)^8 = 256$

PROBABILIDADES

4. PROBABILIDADES

Laplace

→ casos possíveis são equiprováveis

→ probabilidade do acontecimento A:

$$P(A) = \frac{\#C.F.A}{\#C.p} \rightarrow \begin{array}{l} \text{nº casos favoráveis (\#A)} \\ \text{nº casos possíveis (\#E)} \end{array}$$

4.1. Definição (axiomática) de probabilidade

→ probabilidade no conjunto $\mathcal{P}(E)$

• $\forall A \in \mathcal{P}(E), P(A) \geq 0$

• $P(E) = 1$ (= 100%)

→ ex.: dado → $P(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = 1$

• $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A \cap B = \emptyset \Rightarrow$

↓
A e B são incompatíveis

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$\frac{\#A \cup B}{\#E} = \frac{\#A}{\#E} + \frac{\#B}{\#E}$

NOTA:

E: espaço amostral

$\mathcal{P}(E)$: espaço dos acontecimentos

P(A): probabilidade do acontecimento A
→ $A \in \mathcal{P}(E)$

• Linguagem de acontecimentos

→ $A, B \in \mathcal{P}(E)$

• incompatíveis ou mutuamente exclusivos → $A \cap B = \emptyset$

• contrários ou complementares → $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = E$

→ o acontecimento contrário de A: $\bar{A}$

• acontecimento impossível → $\emptyset$ (conjunto vazio)

• acontecimento certo → espaço amostral E

• $\#A = 1$ ($A \subseteq E$) → elementar

• $\#A \geq 2$ ($A \subseteq E$) → composto

4.2. Propriedades das probabilidades

7

→ Corolário ①: $A \subset B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

$$P(B \setminus A) = P(B \cap \bar{A}) = P(B \cup A) - P(A) = P(B) - P(A)$$

→ Corolário ②: $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

$$P(B \setminus A) \geq 0 \Leftrightarrow P(B) - P(A) \geq 0 \Leftrightarrow P(B) \geq P(A)$$

→ Corolário ③: $\forall A \in \mathcal{P}(E), P(A) \in [0, 1]$

$$P(A) \geq 0$$

$$P(E) = 1$$

$$A \subset E \Rightarrow P(A) \leq P(E) \Leftrightarrow P(A) \leq 1$$

$$\text{logo, } P(A) \in [0, 1]$$

$$[P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) - P(B) + P(A \cup B)]$$

④ → Probabilidade da união de acontecimentos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(B \cup A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) - P(A) = P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(B \cap \bar{A}) + P(A \cap B) = P(B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P[(B \cap \bar{A}) \cup (A \cap B)] = P(B) \Leftrightarrow P[B \cap (A \cup \bar{A})] = P(B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P[B \cap E] = P(B) \Leftrightarrow P(B) = P(B)$$

c.q.d.

⑤ → Probabilidade de acontecimentos contrários:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

⑥ → Probabilidade da diferença de acontecimentos:

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B) \rightarrow P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B)$$

$$P(B \setminus A) = P(A \cup B) - P(A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(\bar{A} \cap B) + P(A) = P(A \cup B) \Leftrightarrow P[(\bar{A} \cap B) \cup A] = P(A \cup B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P[(A \cup \bar{A}) \cap (A \cup B)] = P(A \cup B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A \cup B)$$

c.q.d.

$$\begin{aligned} *1 \quad (\bar{A} \cap B) \cap A &= (\bar{A} \cap A) \cap B = \\ &= \emptyset \cap B = \emptyset \quad \checkmark \\ \text{como } A \cap B &= \emptyset, P(A \cup B) = P(A) + P(B) \end{aligned}$$

Exercícios:

1) $P(A) = 0,4$

$P(B) = 0,7$

valor mínimo e máximo de $P(A \cap B)$

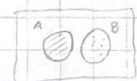
$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,4 + 0,7 - P(A \cup B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 1,1 - P(A \cup B)$$

$$\leq 1$$

$$\text{logo, } 0,1 \leq P(A \cap B) \leq 0,4$$

a) mínimo: $P(A \cap B) \geq 0,1$



b) máximo: $A \subset B, P(A) \leq P(B)$

$$P(A \cap B) = P(A) = 0,4$$



2)	0	0		
	0			0
	0	0		0
	0	0		

8 fichas, 16 quadrículas

Probabilidade de ficarem:

a) 2 diagonais preenchidas?

$$\# \text{ c.f.} = 1 \rightarrow$$

•	•	•	•
•	•	•	•
•	•	•	•
•	•	•	•

$$\# \text{ c.p.} = {}^{16}C_2 \text{ (sempre)}$$

$$P = \frac{1}{12870}$$

b) apenas 1 linha preenchida?

$$\# \text{ c.f.} = 4 \times ({}^{12}C_4 - 3)$$

4 linhas que podem ser preenchidas
restantes 4 fichas que não podem preencher a linha total (4-3)

$$P = \frac{2}{6435}$$

c) preenchidas 2 colunas?

$$P = \frac{4C_2}{12870}$$

d) preenchidas 2 linhas não adjacentes?

•	•	•	•
•	•	•	•
•	•	•	•
•	•	•	•

→ 3 casos

$$P = \frac{3}{12870}$$

3) 3 empresas e 4 trabalhos distintos
cada trabalho → 1 empresa

a) de quantas maneiras podem ser distribuídos os trabalhos?

b) probabilidade de emp. X ficar com os 2 trabalhos?

$$P = \frac{{}^4C_2 \times 2}{36} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} & {}^4C_2 \times 3 \times 2 = 36 \\ & \text{quais são os 2 trabalhos (juntos)?} \rightarrow 2? \\ & \text{com que empresa vão os 2?} \rightarrow 3 \\ & \text{restantes 2 trabalhos distribuídos} \rightarrow 2 \end{aligned}$$

8

5. PROBABILIDADE CONDICIONADA

mudança / restrição do Universo

↳ Probabilidade de A se B / Probabilidade de ocorrer A sabendo que ocorreu B:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

[pela definição]

ou

$$P(A|B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#B}$$

[não por definição]

(P(B) ≠ 0)

Ex: ponto de partida: 52 cartas num baralho

Probabilidade de:

a) sair rei?

$$P(\frac{\text{"rei"}}{R}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Prob. condicionada

b) sair rei, sabendo que saiu figura?

$$P(R|F) = \frac{\#(R \cap F)}{\#F} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$P(R|F) = \frac{P(R \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{13}}{\frac{3}{13}} = \frac{1}{3}$$

por definição

$$P(F) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13} \Rightarrow P(R \cap F) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

c) sair rei, sabendo que não saiu espadas?

$$P(R|E) = \frac{\#(R \cap E)}{\#E} = \frac{3}{39} = \frac{1}{13}$$

LEGENDA:

R → sair rei

F → sair figura

E → sair espadas

• Acontecimento contrário:

P(A|B)

contrário

$$P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$$

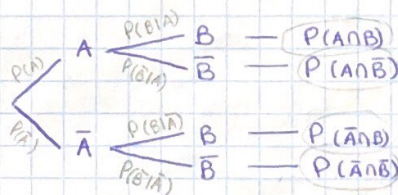
(só se nega o primeiro)

• Representações das probabilidades condicionadas:

Tabela de contingência

	B	$\bar{B}$	TOTAL
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
TOTAL	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

Diagrama em árvore



• Acontecimentos independentes:

Se A e B são independentes,

$$P(A|B) = P(A) \quad (=)$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \quad (=)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Exercícios:

1) O presidente da direção de uma empresa reformou-se, pelo que é necessário eleger um novo presidente da entre os elementos da direção.^D

Nessa empresa, 20%^E dos funcionários são engenheiros e 20%^G são gestores. Sabe-se que 75%^{DIE} dos engenheiros ocupam um lugar de direção e 50%^{DIG} dos gestores também. Dos restantes funcionários apenas 20%^{DIE/NS} ocupam um cargo de direção.

Determine a probabilidade de o futuro presidente ser um engenheiro.^{EID}

DADOS:

$$P(E) = 0,2$$

$$P(G) = 0,2$$

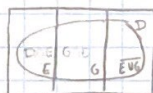
$$P(D|E) = 0,75$$

$$P(D|G) = 0,5$$

$$P(D|E \cap G) = 0,2$$

$$P(E|D) = ? = \frac{P(E \cap D)}{P(D)} = \frac{0,15}{0,37} = \frac{15}{37}$$

② cálculo de P(D):



$$P(D) = P(E \cap D) + P(G \cap D) + P(D \cap E \cap G)$$

$$P(D) = 0,15 + 0,1 + 0,12 = 0,37$$

$$P(D|E) = \frac{P(E \cap D)}{P(D)} = \frac{0,15}{0,37} = \frac{15}{37}$$

$$P(D|E \cap G) = \frac{P(D \cap E \cap G)}{P(E \cap G)} = \frac{0,02}{0,15} = \frac{2}{15}$$

③ cálculo de P(DNE):

$$P(D|E) = \frac{P(D \cap E)}{P(E)}$$

$$\Leftrightarrow P(DNE) = 0,75 \times 0,2 = 0,15$$

E → ser engenheiro

D → ser da direção

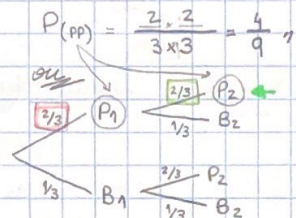
G → ser gestor

2) Retirar sucessivamente 2 bolas de um saco com 2 bolas pretas e 1 branca.

(9)

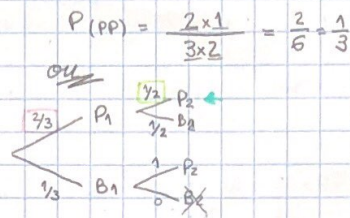
Probabilidade:

i) com reposição?



$$P_{(P_1 \cap P_2)} = P_{(P_2 | P_1)} \times P_{(P_1)} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

ii) sem reposição?



$$P_{(P_1 \cap P_2)} = P_{(P_2 | P_1)} \times P_{(P_1)} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

6. TEOREMA DE BOLZANO - CAUCHY

↳ função (f.r.v.r.) contínua no intervalo $[a, b] \rightarrow c \in [a, b] \Rightarrow f(c) = K$

ou
↳ a equação $f(x) = K$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $[a, b]$

EXEMPLO:

1) $f(x) = x^4 - 2x$: Mostre que a equação $f(x) = -\frac{1}{2}$ tem pelo menos uma solução em $]0; 1[$.

1ª CONTINUIDADE: f é uma função contínua em $[0, 1]$ (função polinomial)

2ª IMAGENS: $f(0) = 0$ $f(1) = -1$

3ª ENQUADRAMENTO: $-1 < -\frac{1}{2} < 0 \rightarrow f(1) < -\frac{1}{2} < f(0)$

4ª CONCLUSÃO: Pelo Teorema de Bolzano - Cauchy, a equação $f(x) = -\frac{1}{2}$ tem, pelo menos, uma solução em $]0; 1[$.

2) $f(x) = \sqrt{x} + mx^2 + 2$ ($D_f = \mathbb{R}_0^+$): Determine para que valores de m o teorema B-C garante que a equação $f(x) = 4$ é possível em $[1, 4]$.

1ª CONTINUIDADE: f é contínua em $\mathbb{R}_0^+$ (soma de funções cont.) $\rightarrow$ logo, é contínua em $[1, 4]$

2ª IMAGENS: $f(1) = m + 3$ $f(4) = 16m + 4$

3ª ENQUADRAMENTO: $m + 3 \leq 4 \leq 16m + 4$ $\vee$ $16m + 4 \leq 4 \leq m + 3$
 $(m \leq 1 \wedge m \geq 0) \vee (\underbrace{m \leq 0 \wedge m \geq 1}_{\text{impossível}})$

4ª CONCLUSÃO: $m \in [0, 1]$

• Corolário do Teorema de Bolzano - Cauchy

↳ função (f.r.v.r.) contínua no intervalo $[a, b] \rightarrow f(a) \times f(b) < 0 \Rightarrow f(c) = 0$
 $(c \in [a, b])$

ou
↳ f tem, pelo menos, um zero em $[a, b]$ se...

EXEMPLO:

1) $f(x) = \frac{x}{2}$; $g(x) = 2 \sin(x)$: Mostre que os gráficos de f e g se intersectam em $\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$

1ª CONTINUIDADE: h é contínua em $\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$, pois resulta de operações com funções cont. neste intervalo.

2ª IMAGENS: $h\left(\frac{2\pi}{3}\right) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) - g\left(\frac{2\pi}{3}\right) \approx -0,68$

$h\left(\frac{5\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) - g\left(\frac{5\pi}{6}\right) \approx 0,31$

Seja $h(x) = f(x) - g(x)$, queremos mostrar que esta tem pelo menos um zero em $\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$.

3ª ENQUADRAMENTO

ou

3ª PRODUTO

$h\left(\frac{2\pi}{3}\right) < 0 < h\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$h\left(\frac{2\pi}{3}\right) \times h\left(\frac{5\pi}{6}\right) < 0$

4ª CONCLUSÃO: logo, pelo 1º Teorema de Bolzano - Cauchy / 2º Corolário do T. de B-C, existe, pelo menos, uma solução para $h(x) = 0$ em $\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$.

Assim, neste intervalo, os gráficos de f e de g interseccionam-se, pelo menos, uma vez.

7. DERIVADAS DE F.R.V.R.

11

7.1. Segunda derivada (ou derivada de 2ª ordem) de uma função
↳ função f

$$f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} \quad \text{ou} \quad f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} \quad \downarrow \quad \text{tmv}[a, a+h]$$

f é duas vezes ~~vez~~ diferenciável num dado intervalo I $\rightsquigarrow$ se $f''(a)$ existir para todo $a \in I$

7.2. Pontos de inflexão e concavidades

- concavidade voltada para cima em $I \Leftrightarrow f'$ é crescente em $I \Rightarrow f''(x) \geq 0$
- concavidade voltada para baixo em $I \Leftrightarrow f'$ é decrescente em $I \Rightarrow f''(x) \leq 0$

- $f''(x) > 0 \Rightarrow$ gráfico de f tem concavidade voltada para cima
- $f''(x) < 0 \Rightarrow$ gráfico de f tem concavidade voltada para baixo

(PI) PONTO DE INFLEXÃO $\rightarrow$ mudança do sentido da concavidade. $\frac{em\ c}{f''(c)=0}$ $\rightarrow$ diferente de pontos angulosos!!

EXEMPLO: $f(x) = x^3 - 12x^2 + 18x + 20$

Estuda o seu gráfico quanto ao sentido das concavidades.

1º) $f'(x) = 3x^2 - 24x + 18$

2º) $f''(x) = 6x - 24$

3º) $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 24 = 0 \Leftrightarrow$

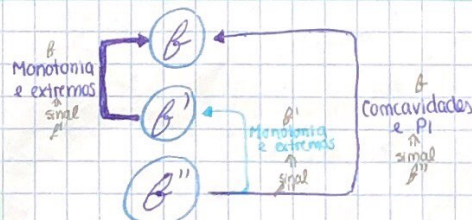
$\Leftrightarrow 6x = 24 \Leftrightarrow x = 4$

4º)	x	$-\infty$	4	$+\infty$
	f''	-	0	+
	f	$\cap$	PI	U

↓
ponto de inflexão

R.: O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $[4; +\infty[$ e para baixo em $] -\infty; 4]$. O ponto de inflexão é $(4, f(4))$.

Resumo



ESTUDO COMPLETO DE UMA FUNÇÃO

$$h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$D_h =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$$

1) Zeros: $h(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$

2) Paridade: $h(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1} = h(x)$
 logo, h é par.

3) Assíntotas:

AVI Como h é contínua em D_h , então o gráfico de h não tem a.v.

ANV

$$m: \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \stackrel{(\infty/\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} = 1 - \frac{1}{+\infty} = 1 - 0 = 1$$

$$b: \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x) \stackrel{(\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 1) - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

logo, a.n.v. (a.o.) $\rightarrow y = x$ para $+\infty$

Como h é função par, a.o. para $-\infty \Rightarrow y = -x$.

4) Monotonia e extremos

$$h'(x) = (\sqrt{x^2 - 1})' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge \sqrt{x^2 - 1} \neq 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge x^2 \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \wedge (x \neq 1 \vee x \neq -1)$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	-	-	0	+	+
$\sqrt{x^2 - 1}$	+	0		0	+
h'	-	nd.		nd.	+
h	$\searrow$				$\nearrow$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{mín.}} \hspace{10em} \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{mín.}}$

h é decrescente em $]-\infty; -1]$ e crescente em $[1; +\infty[$.

$$h(-1) = h(1) = \sqrt{0} = 0 \rightarrow \text{mínimas absolutas}$$

5) Concavidade e pontos de inflexão

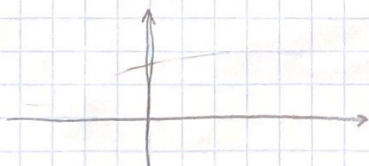
$$h''(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right)' = \frac{1 \cdot (\sqrt{x^2 - 1}) - x \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right)}{x^2 - 1} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x^2 - 1} =$$

$$= \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} \cdot (x^2 - 1)} = \frac{-1}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}} = -\frac{1}{(x^2 - 1)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}$$

$$h''(x) < 0$$

$\rightarrow$ Concavidade do gráfico de h voltada para baixo em $]-\infty; -1]$ e $[1; +\infty[$ (sem PI)

6) Esboço do gráfico



TRIGONOMETRIA

13

8. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

8.1. Fórmulas trigonométricas

	<i>sin</i>	<i>cos</i>	<i>tan</i>
$(\alpha + \beta)$ $(\alpha - \beta)$	$\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$	$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$	$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$
$(\alpha - \beta)$	$\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$	$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$	$\frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$
(2α)	$2 \sin \alpha \cos \alpha$	$\cdot 2 \cos^2 \alpha - 1$ $\cdot \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ $\cdot 1 - 2 \sin^2 \alpha$	$\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

$\rightarrow \cos \alpha \cos \beta$

8.2. Derivada das funções trigonométricas

Limite notável: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

SIN: $(\sin(x))' = \cos(x)$ $(\sin(u))' = u' \times \cos(u)$

COS: $(\cos(x))' = -\sin(x)$ $(\cos(u))' = -u' \times \sin(u)$

TAN: $\begin{cases} (\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} \\ (\tan(u))' = 1 + \tan^2(u) \end{cases}$ $\begin{cases} (\tan(u))' = u' \times \frac{1}{\cos^2(u)} \\ (\tan(u))' = u' [1 + \tan^2(u)] \end{cases}$

EXEMPLOS:

a) $f(x) = 3x + 6 \sin(x) - 8 \sin^3(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x + 2 \sin(3x) = 3x + 2 \sin(2x + x) = 3x + 2 (\sin(2x) \cos x + \sin x \cos(2x)) = \\ &= 3x + 2 (2 \sin x \cos x \cos x + \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x)) = \\ &= 3x + 2 (2 \sin x \cos^2 x + \sin x \cos^2 x - \sin^3 x) = 3x + 2 (3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x) = \\ &= 3x + 2 (3 \sin x (1 - \sin^2 x) - \sin^3 x) = 3x + 2 (3 \sin^4 x - 3 \sin^3 x - \sin^3 x) = \\ &= 3x + 2 (3 \sin x - 4 \sin^3 x) = 3x + 6 \sin x - 8 \sin^3 x \end{aligned}$$

b) $\tan(2x) = 3 \tan(x)$ $\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = 3 \tan x$ $\begin{cases} 1 - \tan^2 x \neq 0 \Rightarrow \tan^2 x \neq 1 \Rightarrow \tan x \neq \pm 1 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow 2 \tan x = 3 \tan x - 3 \tan^3 x \Leftrightarrow -\tan x = -3 \tan^3 x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 = 3 \tan^2 x \Leftrightarrow \tan^2 x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \vee \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $\cos(2x) = \sqrt{3} \sin(2x)$ $\cos(2x) - \sqrt{3} \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos(2x) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos(2x) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

ou

$\cos(2x) = \sqrt{3} \sin(2x) \Leftrightarrow \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\tan(2x)} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan(2x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$

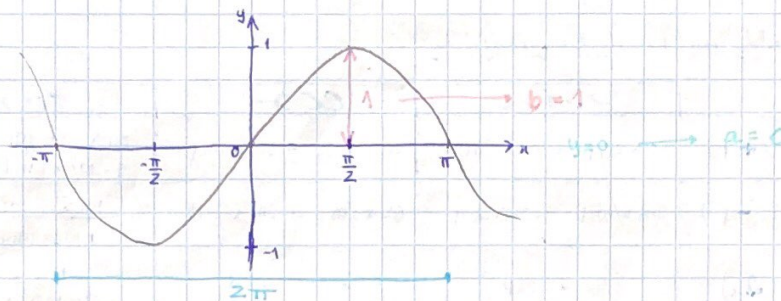
$\Leftrightarrow \tan(2x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

9. ESBOÇOS DE GRÁFICOS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Funções do tipo

$$f(x) = a + b \sin(cx + d) \quad \text{ou}$$

$$f(x) = a + b \cos(cx + d)$$



- Período fundamental:

$$\frac{2\pi}{|c|}$$

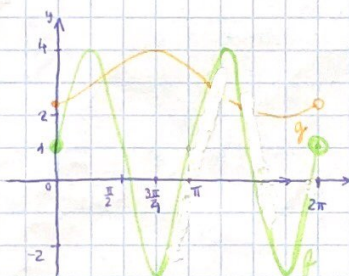
- Parâmetro (b) (associado à amplitude):

$$b = \frac{\text{Máx} - \text{Min}}{2}$$

- Parâmetro (a) (translação vertical):

$$a = \frac{\text{Máx} + \text{Min}}{2}$$

EXEMPLO: $a > 0 / b > 0 / c \in [0, 2\pi[$



$$g(x) = a \cos(bx + c) + d$$

• Período: 2π

$$\bullet \frac{2\pi}{b} = 2\pi \Rightarrow b = 1$$

$$\bullet \text{Máx: } 4 \quad \bullet \text{Min: } -2$$

$$\bullet \frac{a}{2} = \frac{4 - (-2)}{2} = 3$$

$$\bullet \frac{d}{2} = \frac{4 + (-2)}{2} = 1$$

$$\rightarrow g(x) = \cos(x + c) + 3 \leftarrow$$

$$\bullet \text{[c]: } g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 4 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{4} + c\right) + 3 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{4} + c\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} + c = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Como } c \in [0, 2\pi[, \quad k=1 \rightarrow c = \frac{5\pi}{4}$$

$$g(x) = \cos\left(x + \frac{5\pi}{4}\right) + 3$$

$$f(x) = a \sin(bx + c) + d$$

• Período: π

$$\bullet \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Leftrightarrow b = \frac{2\pi}{\pi} \Rightarrow b = 2$$

$$\bullet \text{Máx: } 4 \quad \bullet \text{Min: } -2$$

$$\bullet \frac{a}{2} = \frac{4 - (-2)}{2} = 3$$

$$\bullet \frac{d}{2} = \frac{4 + (-2)}{2} = 1$$

$$\rightarrow f(x) = 3 \sin(2x + c) + 1 \leftarrow$$

$$\bullet \text{[c]: } f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -2 \Leftrightarrow 3 \sin\left(2 \times \frac{3\pi}{4} + c\right) + 1 = -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{2} + c\right) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} + c = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Como } c \in [0, 2\pi[, \quad k=0 \rightarrow c=0 \checkmark$$

$$f(x) = 3 \sin(2x) + 1$$

ESCOLHER UM EXTREMO!!

FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

45

10. JUROS COMPOSTOS E NÚMERO DE NEPER

Juros Simples:

1000 €
0,5% / ano
Durante 5 anos

$$C_0 = 1000 \text{ €}$$

$$C_1 = 1000 + 0,005 \times 1000 = 1005 \text{ €}$$

$$C_2 = 1005 + 0,005 \times 1000 = 1010 \text{ €}$$

$$C_5 = 1000 + 5 \times 5 \text{ €} = 1025 \text{ €}$$

$$C_n = 1000 + 5n$$

$$C_n = C_0 + n \times \frac{j}{100} \times C_0 \left[= C_0 \left(\frac{100 + nj}{100} \right) \right]$$

Juros Compostos:

1000 €
0,5% / ano
Durante 5 anos

$$C_0 = 1000 \text{ €}$$

$$C_1 = 1,005 \times 1000 = 1005 \text{ €}$$

$$C_2 = 1005 \times 1,005 = 1010,8 \text{ €}$$

$$C_5 = 1000 \times 1,005^5 = 1025,25 \text{ €}$$

$$C_n = \frac{C_0}{1000} \times \left(\frac{100 + j}{100} \right)^n$$

taxa de juro (%)

→ Juros compostos com capitalização intermédias

Capitalização	Taxa de juro	Capital
Anuais	3%	$10000 \times 1,03 = 10300 \text{ €} \rightarrow C_1 = (1,015)^2 \times 10000$
Semestrais	$\frac{3}{2} = 1,5\%$	$C_{1/2} = 10000 \times 1,015 = 10150 \text{ €} \rightarrow C_1 = 10150 \times 1,015 = 10302,25 \text{ €}$
Mensais	$1 + \frac{3\%}{12 \times 100} = 1,0025\%$	$C_1 = 10000 \times 1,0025^{12} = 10304,20 \text{ €}$
Diárias	→	$C_1 = 10000 \times \left(1 + \frac{3}{365 \times 100} \right)^{365} = 10304,50 \text{ €}$
n	...	...

→ Capital acumulado ao fim de um ano com capitalizações intermédias

$$C_n = 1 \times \left(1 + \frac{100}{n \times 100} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \approx 2,718... = e \rightarrow \text{Número de NEPER}$$

(convergente)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n} \right)^n = e^k$$

11. FUNÇÕES EXPONENCIAIS de base $a > 0$

$$f(n) = a^n$$

→ ex: $f(n) = 2^n$

EXEMPLOS: Potência de expoente:

— natural: $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

— nulo: $2^0 = 1$ (pois $\frac{2^3}{2^3} = 1 \Rightarrow 2^{3-3} = 1 \Rightarrow 2^0 = 1$)

— inteiro: $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

— racional: $2^{3/2} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$

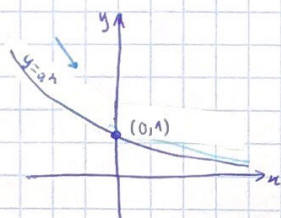
— reais: 2^π

Função Exponencial

$$y = a^x$$

(a > 0)

$$0 < a < 1$$



Domínio: $\mathbb{R}$

Contradomínio: $\mathbb{R}^+$

Zeros: não existem

Monotonia:

est. decrescente $\leftarrow$ $\rightarrow$ est. crescente

Injetividade: injetivas

(objetos diferentes têm imagens diferentes)

Assintota: $y = 0$ (horizontal)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Limites:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Continua

Equações:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

EXEMPLOS:

a) $3^x + x^3 \times 3^x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^x (1 + x^3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^x = 0 \vee 1 + x^3 = 0 \Leftrightarrow$

eq. impossível $\Leftrightarrow x = -1$

b) $4^x + 2^x - 6 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} + 2^x - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2 + y - 6 = 0 \Leftrightarrow$ F.R.

$\Leftrightarrow y = -3 \vee y = 2 \Leftrightarrow y = 2^x$

$\Leftrightarrow 2^x = -3 \vee 2^x = 2 \Leftrightarrow$

eq. imp. $\Leftrightarrow x = 1$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} \leq 8 \Leftrightarrow 2^{2-x} \leq 2^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 - x \leq 3 \Leftrightarrow -x \leq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \geq -1$ C.S. = $[-1, +\infty[$

d) $2^x + 2^{3-x} \leq 5 \Leftrightarrow 2^x + 2^{2-x} - 5 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^x + \frac{2^3}{2^x} - 5 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{(2^x)^2 + 2^2 - 5 \cdot 2^x}{2^x} \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2 - 5y + 4 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y \geq 1 \wedge y \leq 4 \Leftrightarrow y = 2^x$

$\Leftrightarrow 2^x \geq 1 \wedge 2^x \leq 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x \leq 2$

C.S. = $[0; 2]$

C.A.
 $y^2 - 5y + 4 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow y = 1 \vee y = 4$

Inequações:

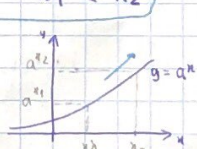
$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

$$a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

(a > 1)

base maior que 1

estrit. crescente

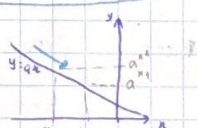


$$a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$$

(0 < a < 1)

base menor que 1

estrit. decrescente



! NÃO passar (1-2^x) para o outro lado!!

e) $\frac{2^x}{1-2^x} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2^x - 1 + 2^x}{1-2^x} \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2 \times 2^x - 1}{1-2^x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2^{x+1} - 1}{1-2^x} \leq 0$

$\Rightarrow 2^{x+1} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^0 \Leftrightarrow x = -1$ (cresc.)

$\Rightarrow 1 - 2^x = 0 \Leftrightarrow 2^x = 2^0 \Leftrightarrow x = 0$ (decresc.)

x	-1	0	+	+	+
2^{x+1}	-	0	+	+	+
$1-2^x$	+	+	+	0	-
$f(x)$	-	0	+	n.d.	-

C.S. = $]-\infty; -1] \cup]0; +\infty[$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$$

EXEMPLO:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n &\stackrel{1^\circ}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)^2\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{n}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{n}\right)\right]^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{n}\right)^n \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{n}\right)^n = e^{-\sqrt{2}} \times e^{\sqrt{2}} = e^{-\sqrt{2} + \sqrt{2}} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

Limite Notável:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

EXEMPLO:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \infty} (x e^{3/y} - x) &\stackrel{MV: y \rightarrow 3/x \text{ ou } x \rightarrow 3/y}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{3}{y} x e^y - \frac{3}{y}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{3e^y - 3}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{3(e^y - 1)}{y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} \times 3 \stackrel{LN: \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1}{=} 1 \times 3 = 3 \end{aligned}$$

Derivada da função exponencial:

$$\begin{aligned} [f(x) = e^x] \quad f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a} \stackrel{MV: y = x - a}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{y+a} - e^a}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{y+a} - e^a}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^a(e^y - 1)}{y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} \times e^a \stackrel{LN}{=} 1 \times e^a = e^a \end{aligned}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(e^u)' = u' \times e^u$$

EXEMPLO:

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$$e^x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 0 \\ \text{imposs.} \end{cases} \vee x-1 = 0 \Leftrightarrow x=1$$

$$x^2 = 0 \Leftrightarrow x=0$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\frac{e^x}{x}$	-	-	0	+
x^2	+	0	+	+
f'	-	n.d.	0	+
f	$\rightarrow$	n.d.	$\frac{1}{e}$	$\rightarrow$

- f é decrescente em $]-\infty; 0[$ e em $]0; 1[$
- f é crescente em $]1; +\infty[$
- $f(1) = e$ é mínimo relativo de f

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{e^x(x-1)}{x^2}\right)' = \frac{(e^x(x-1) + e^x)x^2 - 2x \times e^x(x-1)}{x^4} = \\ &= \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3} \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 0 \wedge x \neq 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x	+	+	+
$x^2 - 2x + 2$	+	+	+
x^3	-	0	+
f''	-	n.d.	+
f	$\cap$	n.d.	$\cup$

- o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty; 0[$ e voltada para cima em $]0; +\infty[$
- não existem pontos de inflexão

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+1}{4n^2-3}\right)^{n+1} &= \left(\frac{3}{4}\right)^{\infty} = 0 \\ \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+1}{4n^2-3}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} \\ \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\sin(x-1)} &\stackrel{MV: y = x-1}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{y+1} - e}{\sin y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e(e^y - 1)}{\sin y} \stackrel{MV: y \rightarrow 0}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \left[e \times \frac{e^y - 1}{y} \times \frac{y}{\sin y} \right] = \\ &= e \times 1 \times \frac{1}{1} = e \end{aligned}$$

ANUNCIAR (para revisão de)

12. FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

de base $a > 0$, $a \neq 1$

x	2^x
1	→ 2
2	→ 4
3	→ 8
?	→ 9
??	→ 512

$2^2 = 4 \Rightarrow \log_2 4 = 2$
 $2^x = 9 \Leftrightarrow x = \log_2 9$
 $2^9 = 512 \Rightarrow \log_2 (512) = 9$

Para $y > 0$:

$$a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y$$

NOTA: o logaritmo é um expoente.

Propriedades:

- $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $a^{\log_a x} = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\log_a (a^x) = x$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$

EXEMPLOS:

a) $2 = \log_x 3 \Leftrightarrow 3 = x^2 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \Leftrightarrow$
 b) $x = \pm \sqrt{3} \wedge x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$

b) $\log_x (2x-1) = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2x-1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \Leftrightarrow$
 c) $x = 1 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \Leftrightarrow \emptyset$ impossível

c) $\log_{125} \sqrt{5} = \log_{125} 5^{1/2} = \log_{125} (125^{1/3})^{1/2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Qualquer que seja $x \in \mathbb{R}^+$: $\log x = \log_{10} x$

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$$

$$\ln x = \log_e x$$

EXEMPLO:

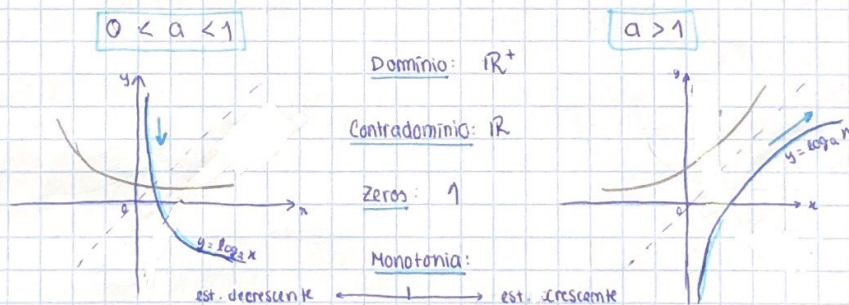
$3e^{x+1} = 2e^{-x} \Leftrightarrow 3e^{x+1} = \frac{2}{e^x} \Leftrightarrow 3e^{x+1} \times e^x = 2 \Leftrightarrow e^{2x+1} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2x+1 = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow$

$x = \frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right) - 1}{2}$

Função Logaritmo

$$y = \log_a x$$

$(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$



Injetividade: injetivas

Assíntota: $x = 0$ (vertical)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$$

Limites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$$

Contínua

Propriedades: $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \text{ e } x, y \in \mathbb{R}^+)$

- $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$

- $\log_a (x^k) = k \cdot \log_a x$
- $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Domínio: $f = \log_a [A(x)]$
 $D_f = \{x \in \mathbb{R} : A(x) > 0\}$

Equações:

$$\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$$

$\downarrow$
 $x, y \in \mathbb{R}^+$

Inequações:

$a > 1$ ↗ crescente
 $\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x > y$ ($0 < a < 1$ não sei)

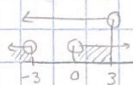
EXEMPLOS:

a) $\log(x^2 + 3x) - \log(3 - x) = 1$

c) $\log_4(2x) < 1$

1º) calcular o domínio ($x > 0 \wedge y > 0$)

1º) $D = \{x \in \mathbb{R} : 2x > 0\} = \mathbb{R}^+$



$$\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 3x > 0 \wedge 3 - x > 0\} = \\ &= (-3, 0) \cup (0, 3] \cap]-\infty, 3[= \\ &=]-\infty, -3[\cup]0, 3[\end{aligned}$$

2º) $\log_4(2x) < 1 \Leftrightarrow$ base 4: crescente
 $\Leftrightarrow \log_4(2x) < \log_4 4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2x < 4 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x < 2 \wedge x \in \mathbb{R}^+$

2º) Igualdade entre 2 logaritmos
com a mesma base ($\wedge x \in D$)

3º) $CS =]0, 2[$

$$\begin{aligned} \log(x^2 + 3x) - \log(3 - x) &= 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log(x^2 + 3x) &= 1 + \log(3 - x) \wedge x \in D \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log(x^2 + 3x) &= \log 10 + \log(3 - x) \wedge x \in D \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log(x^2 + 3x) &= \log(30 - 10x) \wedge x \in D \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 3x &= 30 - 10x \wedge x \in D \Leftrightarrow x^2 + 13x - 30 = 0 \wedge x \in D \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= -15 \vee x = 2 \wedge x \in D \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= -15 \vee x = 2 \end{aligned}$$

d) $2 \log(x+1) > 1 + \log(x+0,1)$

1º) $D = \{x \in \mathbb{R} : x+1 > 0 \wedge x+0,1 > 0\} =$
 $= \{x \in \mathbb{R} : x > -1 \wedge x > -1/10\} =$
 $=]-1/10, +\infty[$

2º) $2 \log(x+1) > 1 + \log(x+0,1) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \log(x+1)^2 > \log(10x+1) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x+1)^2 > 10x+1 \wedge x \in D \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 > 10x + 1 \wedge x \in D \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^2 - 8x > 0 \wedge x \in D \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x(x-8) > 0 \wedge x \in D \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x < 0 \vee x > 8 \wedge x \in D$

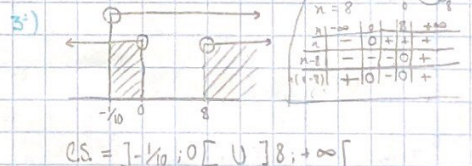
3º) Conjunto - Solução (pertence ao domínio)

Como $-15, 2 \in D$, $CS = \{-15; 2\}$

$\frac{(x+1)^2}{x-1} = 0$
 $\frac{x^2+2x+1}{x-1} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 + 2 = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)$

1º) $D = \{x \in \mathbb{R} : (x+1)^2 > 0 \wedge x+1 > 0\} =$
 $= \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1 \wedge x > -1\} =$
 $=]-1, +\infty[$



$CS =]-1/10, 0[\cup]8, +\infty[$

$2 \ln(x+1) + 2 = \ln(x+1)$
 $\ln(x+1) + 2 = 0$
 $x+1 = e^{-2}$
 $x = -1 + \frac{1}{e^2}$

2º) $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 + 2 = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 + 2 \lim_{x \rightarrow -1} e^2 = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1} [e^2(x+1)^2] = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow e^2(x+1)^2 = x+1 \Leftrightarrow [e^2(x+1)^2] - (x+1) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x+1)[e^2(x+1) - 1] = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x+1 = 0 \vee e^2(x+1) = 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = -1 \vee x = -1 + \frac{1}{e^2} \wedge x \in D$

3º) $x = -1 + \frac{1}{e^2}$ $CS = \{-1 + \frac{1}{e^2}\}$

NOTA:

→ Quando só há 1 logaritmo, não é preciso calcular o domínio
 → Quando há 2 ou mais, calcular domínio (mas calcular sempre!)

$D = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

e) $\log_x 4 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow$
 $x = 2 \vee x = -2$
 $R: x = 2$

f) $e^{1-0,1x} + e^{0,1x-1} = 3 \Leftrightarrow$
 $e^{-(0,1x-1)} + e^{0,1x-1} = 3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{e^{0,1x-1}} + e^{0,1x-1} = 3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (e^{0,1x-1})^2 + 1 = 3e^{0,1x-1} \Leftrightarrow$ MV: $y = e^{0,1x-1}$
 $\Leftrightarrow y^2 - 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow$ FR < MV
 $\Leftrightarrow e^{0,1x-1} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \vee e^{0,1x-1} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 10 \left[\ln \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) + 1 \right] \vee$
 $\vee x = 10 \left[\ln \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right) + 1 \right]$

Derivada da função exponencial de base a ($a > 0$)

$$\left[a^x = e^{x \ln a} \right] \quad (a^x)' = (e^{x \ln a})' = \ln a \times e^{x \ln a} = \ln a \times a^x$$

$$(a = e^{\ln a})$$

$$(a^x)' = \ln a \times a^x$$

$$(a^u)' = \ln a \times u' \times a^u$$

Derivada da função logarítmica de base a ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $x \in \mathbb{R}^+$)

$$[\ln(x)]' = \frac{1}{x}$$

$$[\ln(u)]' = \frac{1}{u} \times u' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{\ln a} \times \ln x' = \frac{1}{\ln a \times x} \quad [\log_a(u)]' = \frac{u'}{u \times \ln a}$$

EXEMPLOS:

1) $g(x) = 2^x$

deduza $t = \ln \sqrt{2}$

$T_{\sqrt{2}}$?

$$g'(x) = (2^x)' = \ln 2 \times 2^x$$

$$g'(x) = \ln \sqrt{2} \Leftrightarrow \ln 2 \times 2^x = \ln \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^x = \frac{\ln \sqrt{2}}{\ln 2} \wedge \frac{\ln \sqrt{2}}{\ln 2} \neq 0 \quad \text{c. universal} \quad \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{2} \times \frac{\ln 2}{\ln 2} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

$$g(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$T_{\sqrt{2}}(-1; 1/2)_{//}$$

2) $f(x) = \frac{x}{1 - \log x}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge 1 - \log x \neq 0\} = \mathbb{R}^+ \setminus \{10\}$$

$$f'(x) = \frac{(1 - \log x) - x(1 - \log x)'}{(1 - \log x)^2} = \frac{(1 - \log x) + \frac{x}{x \ln 10}}{(1 - \log x)^2} = \frac{1 - \log x + \frac{\ln e}{\ln 10}}{(1 - \log x)^2} =$$

$$= \frac{1 - \log x + \log e}{(1 - \log x)^2} = \frac{\log(\frac{10}{x} \times e)}{(1 - \log x)^2}$$

Monotonia & extremos

relativas:

$$\log\left(\frac{10}{x} \times e\right) = 0 \quad \xrightarrow{\log_{10} 10^0} \Leftrightarrow \frac{10}{x} \times e = 1 \quad \wedge \quad x \in D \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 10e \quad \left| \quad (1 - \log x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 10 \right.$$

x	0	10	10e	$+\infty$
$1 - \log x + \log e$	-	+	+	+
$(1 - \log x)^2$	-	+	+	+
f'	-	n.d.	+	-
f	-	n.d.	máx.	-

f é crescente em $]0; 10[$ e em $]10e; +\infty[$ e decrescente em $[10e; +\infty[$.
máximo rel.: em $x = 10e$.

→ extra: função inversa

$$p(x) = \frac{1}{e^{-x} - e}$$

$$D_p = \{x \in \mathbb{R} : e^{-x} - e \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e^{-x} - e} = 0 \rightarrow \text{impossível} \rightarrow p \text{ não tem zeros}$$

$$p^{-1}(x) \rightarrow x = \frac{1}{e^{-y} - e} \Leftrightarrow x e^{-y} - e x = 1 \quad (\wedge) \quad e^{-y} - e \neq 0 \Leftrightarrow e^{-y} x = 1 + e x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-y} = \frac{1 + e x}{x} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1 + e x}{x}\right) = -y \rightarrow p^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x}{1 + e x}\right)$$

$$D_{p^{-1}} = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{1 + e x} > 0\} =]-\infty; -\frac{1}{e}[\cup]0; +\infty[$$

$$p^{-1}:]-\infty; -\frac{1}{e}[\cup]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$x \rightarrow \ln\left(\frac{x}{1 + e x}\right)$$

$$g(x) = \frac{1 - \log_2 x}{2}$$

$$D_g = \mathbb{R}^+$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \log_2 x}{2} = 0 \Leftrightarrow \log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

$$g^{-1}(x) \rightarrow x = \frac{1 - \log_2 y}{2} \Leftrightarrow \log_2 y = 1 - 2x \rightarrow g^{-1}(x) = 2^{1-2x}$$

$$D_{g^{-1}} = \mathbb{R}$$

$$g^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \rightarrow 2^{1-2x}$$

C.A.

$$e^{-x} - e = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} = e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

17. NÚMEROS COMPLEXOS

(23)

• Unidade imaginária: $i^2 = -1$

• Forma algébrica de um número complexo:

$$z = a + bi$$

parte imaginária $\rightarrow \text{Im}(z) = b$

parte real $\rightarrow \text{Re}(z) = a$

$\rightarrow$ Imaginário puro: $a=0 \wedge b \neq 0$
 $\rightarrow 3i / -1/2i$
 $(\text{Re}(z)=0 \wedge \text{Im}(z) \neq 0)$

$\rightarrow$ Real: $b=0$ ($\text{Im}(z)=0$)

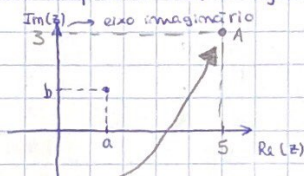
$$\rightarrow 5 / -30 / 0$$

$\rightarrow$ De fora: $5+3i$

$$\rightarrow A_{\text{cm}}(5;3)$$

afixo do n.º complexo

• Plano complexo ou Plano de Argand:



18. OPERAÇÕES COM NÚMEROS COMPLEXOS

• Potenciação

$$(1-2i)^2 = 1^2 - (2i)^2 = 1 + 2^2 = 5$$

$$(3+i)^3 = 3^3 + 3 \times 3^2 \times i + 3 \times 3 \times i^2 + i^3 = 18 + 26i$$

• Potenciação de base i

$$i^0 = 1 \quad / \quad i^1 = i \quad / \quad i^2 = -1 \quad / \quad i^3 = -i \quad / \quad i^4 = 1$$

$$i + i^2 + i^3 + i^4 = 0$$

$$0 \times 250 + i^{1001} = i$$

$$i^{4k} = 1, \quad k \geq 0$$

$$[(i^4)^k = 1]$$

EXEMPLOS: $\rightarrow i^{101} = i^{100} \times i = (i^4)^{25} \times i = i$
 $\rightarrow i^{150} = i^{148} \times i^2 = (i^4)^{37} \times i^2 = -1$
 $\rightarrow i + i^2 + i^3 + \dots + i^{1001} = i$

Exercício: $(2i)^n + (1+i)^{2n} = 64i$ ($=$)

$$(1) (2i)^n + [(1+i)^2]^n = 64i \quad (=) \quad (2i)^n + (2-2i)^n = 64i \quad (=)$$

$$(2) (2i)^n + (2i)^n = 64i \quad (=) \quad 2 \times 2^n \times i^n = 64i \quad (=) \quad 2^{n+1} \times i^n = 64i \quad (=)$$

$$(3) \begin{cases} 2^{n+1} = 64 \\ i^n = i \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} n+1 = 6 \\ n = 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} n = 5 \\ i^5 = i \end{cases} \quad \checkmark$$

$$S_{1001} = i \times \frac{1-i^{1001}}{1-i}$$

• Conjugado de um número complexo:

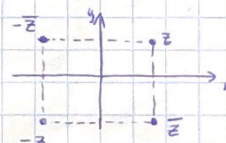
$$\bar{z} = a - bi$$

$$\bar{\bar{z}} = z$$

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$\overline{zw} = \bar{z} \times \bar{w}$$

$$\hookrightarrow \overline{z^2} = \bar{z}^2$$



$$z + \bar{z} = 2a \quad (=)$$

$$(1) \frac{\text{Re}(z)}{a} = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$z - \bar{z} = 2bi \quad (=)$$

$$(2) \frac{\text{Im}(z)}{b} = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$\rightarrow z \text{ é real: } z = \bar{z}$$

$$\rightarrow z \text{ é im. puro: } z = -\bar{z}$$

• Módulo de um número complexo:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$\hookrightarrow$ medida da distância (no plano) entre a origem e o ponto afixo de z

$$|x| > a \quad (=) \quad x > a \vee x < -a$$

$$|x| < a \quad (=) \quad -a < x < a$$

Propriedades:

$$\rightarrow |z| = |\bar{z}|$$

$$\rightarrow |z|^2 = z \times \bar{z} = a^2 + b^2$$

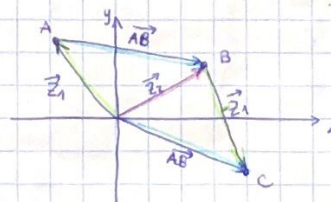
$$\rightarrow |zw| = |z| |w|$$

$$\rightarrow |z+w| \leq |z| + |w|$$

(desigualdade triangular)

$$\overrightarrow{AB} = |z_2 - z_1|$$

$$|z| = 0 \quad (=) \quad z = 0$$



EXERCÍCIO:

$$a) \begin{cases} \bar{z} + z = 16 \\ |z| + |\bar{z}| = 20 \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} 2a = 16 \\ 2|z| = 20 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} a = 8 \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 10 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 8^2 + b^2 = 100 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} b^2 = 36 \end{cases}$$

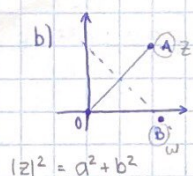
$$(5) \begin{cases} a = 8 \\ b = \pm 6 \end{cases}$$

$$z = \{8 - 6i; 8 + 6i\}$$

Lembrar:

$$\sqrt{z}$$

EXERCÍCIOS:

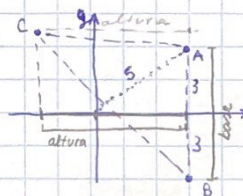


$$\begin{aligned} \overline{BO} &= \overline{BA} \Leftrightarrow |w| = |z - w| \Leftrightarrow \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow c^2 + d^2 = a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bd + d^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2ac + 2bd \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2(ac + bd) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |z|^2 = 2 \operatorname{Re}(z\overline{w}) \end{aligned}$$

$$|z|^2 = a^2 + b^2$$

$$\begin{aligned} z\overline{w} &= (a+bi)(c-di) = ac - adi + cb + bd = \\ &= \frac{(ac+bd)}{\operatorname{Re}(z\overline{w})} + (cb-ad)i \end{aligned}$$

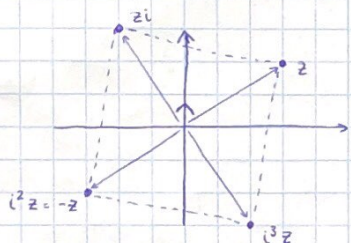
c) $A \in 1^\circ \Rightarrow w$
 $B = \overline{w}$
 $C = i\overline{w}$
 $\overline{AB} = 6$
 $|w| = 5$
 $A_{[ABC]} = ?$



$A = 4+3i$
 $B = 4-3i$
 $C = -4+3i$

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= |w - \overline{w}| = 6 \Leftrightarrow |2yi| = 6 \Leftrightarrow \sqrt{(2y)^2} = 6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4y^2 = 36 \Leftrightarrow y = \pm 3 \rightarrow w \in 1^\circ \Rightarrow w = x+3i \\ |w| &= 5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 9} = 5 \Leftrightarrow x^2 + 9 = 25 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4 \Rightarrow w = 4+3i \end{aligned}$$

$$A_{[ABC]} = \frac{6 \times (x_A + |x_C|)}{2} = \frac{6 \times (4 + 4)}{2} = 24$$



exemplo:

$$\begin{aligned} z &= 3+2i \\ iz &= -2+3i \\ i(iz) &= -3-2i \\ i^3 z &= 2-3i \end{aligned}$$

Multiplicar por i
 Rotação de 90°

• Quociente de um número complexo:

$$\frac{w}{z} = \frac{(c+di)(a-bi)}{a^2+b^2} = \frac{ac+bd}{a^2+b^2} + \frac{ad-bc}{a^2+b^2}i$$

$$\frac{w}{z} = \frac{w\overline{z}}{|z|^2}$$

$$\left| \frac{w}{z} \right| = \frac{|w|}{|z|} \quad \text{e} \quad \overline{\left(\frac{w}{z} \right)} = \frac{\overline{w}}{\overline{z}}$$

• Inverso de um número complexo:

$$\frac{1}{z} = -\frac{1 \times \overline{z}}{|z|^2}$$

EXERCÍCIOS:

1) $\left| \frac{1}{z} + 1 \right|^2 + \left| \frac{1}{z} - 1 \right|^2 = (a+1)^2 + b^2 + (a-1)^2 + b^2 = 2(a^2+b^2) + 2a^2 - 2a^2 + 1 + 1 = 2 + 2 = 4$
 $|z| = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$

$\frac{1}{z} = \frac{c+di}{a+bi} = \frac{(c+di)(a-bi)}{a^2+b^2} = \frac{ac+bd}{a^2+b^2} + \frac{ad-bc}{a^2+b^2}i$
 $\left| \frac{1}{z} + 1 \right|^2 = \left| \frac{ac+bd}{a^2+b^2} + \frac{ad-bc}{a^2+b^2}i + 1 \right|^2 = \left| \frac{ac+bd+a^2+b^2}{a^2+b^2} + \frac{ad-bc}{a^2+b^2}i \right|^2 = \frac{(ac+bd+a^2+b^2)^2 + (ad-bc)^2}{(a^2+b^2)^2}$

2) Raízes quadradas de $z = 2i$

$$\begin{aligned} w^2 &= z \Leftrightarrow (a+bi)^2 = 2i \Leftrightarrow a^2 + 2abi - b^2 = 2i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 \\ ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \vee a = -b \\ b^2 = 1 \vee b = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \vee a = -1 \\ b = 1 \vee b = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$w_1 = 1+i \quad \& \quad w_2 = -1-i$$

3) $\frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z}$ é um n.º real

$$\begin{aligned} \frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z} &= \frac{a+bi}{a-bi} + \frac{a-bi}{a+bi} = \frac{(a+bi)^2 + (a-bi)^2}{a^2+b^2} = \\ &= \frac{2a^2 - 2b^2}{a^2+b^2} = \frac{2(a^2-b^2)}{a^2+b^2} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\frac{z}{\overline{z}} = \frac{a+bi}{a-bi} = \frac{(a+bi)(a+bi)}{(a-bi)(a+bi)} = \frac{a^2-b^2 + 2abi}{a^2+b^2}$$

$$\frac{z^2 + \overline{z}^2}{|z|^2} = \frac{z^2 + \overline{z}^2}{|z|^2} = \frac{2 \operatorname{Re}(z^2)}{|z|^2} \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{-8} = \sqrt{2^2 \times 2 \times i^2} = 2i\sqrt{2}$$

4) $z^3 - z + 6 = 0 \Leftrightarrow (z+2)(z^2 - 2z + 3) = 0 \Leftrightarrow z = -2 \vee z^2 - 2z + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$$P_\Delta = ? \quad z = -2$$

$$\Leftrightarrow z = -2 \vee z = \frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2} \Leftrightarrow z = -2 \vee z = 1 \pm i\sqrt{2}$$

$$C.S. = \{-2, 1-i\sqrt{2}, 1+i\sqrt{2}\}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 6 \\ -2 & -2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 & 0 = R \end{array}$$

$$\overline{AB} = |1-i\sqrt{2}+2| = \sqrt{11}$$

$$\overline{BC} = |1-i\sqrt{2}-1+i\sqrt{2}| = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{AC} = |1-i\sqrt{2}+2| = \sqrt{11}$$

$$\begin{aligned} P_\Delta &= 2\sqrt{11} + 2\sqrt{2} = \\ &= 2(\sqrt{11} + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

• Processo 1:

$$\frac{z+2i}{1-z} = -i+1 \Leftrightarrow \frac{z+2i}{1-z} + i-1 = 0 \Leftrightarrow \frac{z+2i+(1-z)(i-1)}{1-z} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{z+2i+i-1-zi+z}{1-z} = 0 \Leftrightarrow \frac{2z-1+3i-zi}{1-z} = 0 \Leftrightarrow z(2-i) + (-1+3i) = 0 \wedge 1-z \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1-3i}{2-i} \wedge z \neq 1 \Leftrightarrow z = \frac{(1-3i)(2+i)}{2^2+1^2} \wedge z \neq 1 \Leftrightarrow z = \frac{2+i-6i+3}{5} \wedge z \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = 1-i \wedge z \neq 1 \Leftrightarrow z = 1-i \quad \text{C.S.} = \{1-i\}$$

• Processo 2:

$$z+i\bar{z} = 1-4i \Leftrightarrow x+yi + i(x-yi) = 1-4i \Leftrightarrow (x+y) + (x-y)i = 1-4i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 1 \\ x-y = -4 \end{cases} \rightarrow \text{impossível} \quad \text{C.S.} = \emptyset$$

ou

$$(1-2i)z - i\bar{z} = 2 \Leftrightarrow (1-2i)(x+yi) - i(x-yi) = 2 \Leftrightarrow x+yi-2xi+2y-ni-y = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+y) + (-3x+y)i = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 2 \\ -3x+y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 2 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 3/2 \end{cases}$$

$$\text{C.S.} = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \right\}$$

• Processo 3:

3 soluções



$$(z^3) + 2z^2 + (z+2) = 0 \Leftrightarrow (z-i)(z^2+3z-2i) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z-i)(z+i)(z-i+2) = 0 \Leftrightarrow z = i \vee z = -i \vee z = -2-2i$$

$$\text{C.S.} = \{-i; i; -2-2i\}$$

$$\begin{array}{ccc|c} i & 2 & i & 2 \\ -i & \downarrow & 1 & -3i & -2 \\ i & 3 & -2i & 0=R \\ i & \downarrow & -1 & 2i \\ i & 2 & 0=R \end{array}$$

EXERCÍCIOS:

4 soluções

2 pares conjugados

$$1) z^3 + 6z^2 + 25 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 25 = 0 \Leftrightarrow z^2 = \frac{-6 \pm \sqrt{36-4 \times 25}}{2} \Leftrightarrow z^2 = -3 \pm 4i \Leftrightarrow$$

$$(x+yi)^2 = -3 \pm 4i \vee (x-yi)^2 = -3 \pm 4i \Leftrightarrow x^2 + 2xyi - y^2 = -3 \pm 4i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = \pm 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{4}{x^2} = -3 \\ y = \frac{\pm 2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{4}{x^2} = -3 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \vee x = -1 \\ y = -2 \vee y = 2 \end{cases}$$

$$\text{C.S.} = \{-1+2i; -1-2i; 1+2i; 1-2i\}$$

$$2) z^3 - 16 = 0$$

4 soluções

$$(1) (z^3-4)(z^2+4) = 0 \Leftrightarrow z^3 = 4 \vee z^2 = -4 \Leftrightarrow z = 2 \vee z = -2 \vee z = 2i \vee z = -2i$$

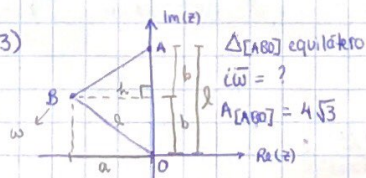
ou

$$(2) 2 \text{ e } -2 \text{ são soluções}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -16 & \\ 2 & \downarrow & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 0=R \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 8 \\ -2 & -4 & -8 & -16 \\ 1 & 0 & 4 & 0=R \end{array} \quad z^3 - 16 = (z-2)(z^2+4)$$

$$3)$$



$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h^2 = \frac{3l^2}{4} \xrightarrow{l>0} \frac{\sqrt{3}l}{2} = h$$

$$A = \frac{2 \times h \times l}{2} = \frac{\sqrt{3}l^2}{2} = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow l^2 = 16 \xrightarrow{l>0} l = 4$$

$$h = \frac{\sqrt{3} \times 4}{2} = 2\sqrt{3} \quad b = \frac{l}{2} = 2$$

$$\omega = -2\sqrt{3} + 2i$$

$$i\bar{\omega} = i(-2\sqrt{3}-2i) = 2-2\sqrt{3}i$$

(26)

$$4) x \in]-\pi; 0[\wedge z \text{ é real}$$

$$z = \frac{i}{\cos(2x) - i} = \frac{\cos(2x)i - 1}{(\cos(2x))^2 + 1} = \frac{1}{(\cos(2x))^2 + 1} - \frac{\cos(2x)}{(\cos(2x))^2 + 1} i$$

$$\frac{\cos(2x)}{(\cos(2x))^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \wedge ((\cos(2x))^2 + 1 \neq 0) \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + K\pi, K \in \mathbb{Z} \wedge \frac{(\cos(2x))^2 + 1}{\text{cond. universal}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{K\pi}{2}, K \in \mathbb{Z}$$

$$-\pi \quad \xrightarrow{\quad} \quad x \in]-\pi; 0[\quad \longrightarrow \quad K = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} \quad / \quad K = -2 \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{4}$$

$$5) \left| \frac{z}{|z|} + \frac{|z|}{z} \right| = \left| \frac{z \times \bar{z} + |z|^2}{|z| \times \bar{z}} \right| = \left| \frac{z \times \bar{z} + |z|^2}{|z| \times \bar{z}} \right| = \left| \frac{z \times (z \times \bar{z})}{|z| \times \bar{z}} \right| = \left| \frac{|z|^2}{|z| \times \bar{z}} \right| = \frac{|z|}{|\bar{z}|} = \frac{|z|}{|z|} = 1$$

19. FORMA TRIGONOMÉTRICA DE UM NÚMERO COMPLEXO

• Forma trigonométrica ou polar de um número complexo z :

$$|z|e^{i\theta}$$

$$- [z = a + bi \Rightarrow z = |z|e^{i\theta}]$$

$$\text{EXEMPLO: } z = -\sqrt{3} + i \Rightarrow z = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$1^\circ) \text{ Módulo: } |z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$2^\circ) \text{ Argumento: } \tan \theta = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \wedge \theta \in 2^\circ \text{Q}$$

$$\theta = \frac{5\pi}{6}$$



$\theta \rightarrow$ argumento de z

$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$



$$- [z = |z|e^{i\theta} \Rightarrow z = a + bi] \quad \dots \quad \rightarrow \quad e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\text{EXEMPLO: } z = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} \Rightarrow z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$|z| \times (\cos(\frac{3\pi}{4}) + i \sin(\frac{3\pi}{4})) = 2 \times (-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

Argumento de z :

Nº real

Positivo: $\theta = 0 + 2K\pi, K \in \mathbb{Z}$

Negativo: $\theta = \pi + 2K\pi, K \in \mathbb{Z}$

Imag. puro

Positivo: $\theta = \frac{\pi}{2} + 2K\pi, K \in \mathbb{Z}$

Negativo: $\theta = -\frac{\pi}{2} + 2K\pi, K \in \mathbb{Z}$

Argumento principal de z :

$z \neq 0$

$\theta \in]-\pi; \pi[$

$\downarrow$
Arg(z)

• Igualdade de complexos na forma trigonométrica:

$$(|z|e^{i\theta} = |z_1|e^{i\theta_1})$$

$$z = z_1 \Leftrightarrow |z| = |z_1| \wedge \theta = \theta_1 + 2K\pi, K \in \mathbb{Z}$$

$$(\theta - \theta_1 = 2K\pi, K \in \mathbb{Z})$$

$$\text{EXEMPLO: } z = Re^{i(\theta + \frac{\pi}{3})} \text{ e } w = 1 + i$$

$$w = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z = w \Leftrightarrow Re^{i(\theta + \frac{\pi}{3})} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow R = \sqrt{2} \wedge \theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2K\pi, K \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R = \sqrt{2} \wedge \theta = -\frac{\pi}{12} + 2K\pi, K \in \mathbb{Z}$$

• Conjugado de z : $|z|e^{-i\theta} = |z|e^{-i\theta}$ } Simétrico de z : $-|z|e^{i\theta} = |z|e^{i(\theta + \pi)}$

Operações

$$z_1 \times z_2 = |z_1| \times |z_2| e^{i(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\alpha - \beta)}$$

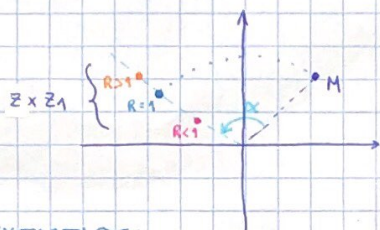
EXEMPLO:

$$4e^{-i\frac{4\pi}{5}} \times i^{22} = 4e^{-i\frac{4\pi}{5}} \times (-1) = 4e^{i(\pi - \frac{4\pi}{5})} = 4e^{i\frac{\pi}{5}}$$

$$i^{20} \times i^2 = (i^4)^5 \times i^2 = -1$$

• Interpretação geométrica do produto de 2 n.º complexos

(27)



$$z_1 = R e^{i\alpha}$$

Rotação da centro na origem do referencial e ângulo de medida α , composta com a homotetia com o mesmo centro e razão R

EXEMPLOS:

$$1) \frac{z_2}{z_1} = \frac{5e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\alpha}} = 5e^{i(\frac{\pi}{3}-\alpha)} = 5\cos(\frac{\pi}{3}-\alpha) + 5\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)i$$

$$y = -5$$

$$\text{Im}(w) = -5$$

$$5\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha) = -5 \Leftrightarrow \sin(\frac{\pi}{3}-\alpha) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}-\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2K\pi, K \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{5\pi}{6} + 2K\pi, K \in \mathbb{Z}$$

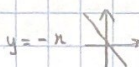
$$\alpha \in [0, 2\pi[$$

$$2) \begin{aligned} z &= e^{i\alpha} \\ w &= e^{i(\frac{3\pi}{2}-\alpha)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z+w &= e^{i\alpha} + e^{i(\frac{3\pi}{2}-\alpha)} = (\cos\alpha + i\sin\alpha) + (\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha) + i\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)) = \\ &= \cos\alpha + i\sin\alpha - \sin\alpha - i\cos\alpha = (\cos\alpha - \sin\alpha) + i(\sin\alpha - \cos\alpha) \end{aligned}$$



Bissetriz dos quadrantes pares $y = -x$



Como $\sin\alpha - \cos\alpha = -(\cos\alpha - \sin\alpha)$, então este afixo pertence a $y = -x$.

$$3) \frac{(1 + \cos\theta) + i\sin\theta}{(1 + \cos\theta) - i\sin\theta}$$

$$\left| \frac{(1 + \cos\theta) + i\sin\theta}{(1 + \cos\theta) - i\sin\theta} \right| = \frac{\sqrt{(1 + \cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2}}{\sqrt{(1 + \cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2}} = 1$$

• Potência de expoente natural de um número complexo:

$$z^n = (|z|e^{i\theta})^n = |z|^n e^{in\theta}$$

EXEMPLOS:

$$1) (zw)^n \rightarrow n: \text{n.º real positivo}$$

$$zw = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

$$(zw)^n = (\sqrt{2})^n e^{i\frac{(5\pi)n}{12}}$$

$$z = 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$w = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Menor valor de n

$$\frac{n \cdot 5\pi}{12} = 2K\pi, K \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{40K}{5}, K \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Como } n \in \mathbb{N} \rightarrow K=9 \Rightarrow n=40$$

$$2) z \in 1^{\circ}Q \rightarrow z = R e^{i\theta}, \theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$$

$$z^3 \notin 1^{\circ}Q$$

$$z^3 = R^3 e^{i3\theta} \rightarrow 3\theta \in]0; \frac{3\pi}{2}[$$



Logo, z^3 não pode pertencer ao $1^{\circ}Q$.

• Raízes índice n de um número complexo w ($n \in \mathbb{N}$)

$$\rightarrow z^n = w$$

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2K\pi}{n})}, K = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

$\rightarrow n$ soluções:

α argumento de w

Os afijos das raízes de índice n de um n.º complexo z :

- pertencem à circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{|z|}$;
- formam um polígono ($n > 2$) regular com n lados;
- se forem consecutivos, a amplitude do ângulo entre eles é $\frac{2\pi}{n}$ rad.

EXEMPLO:

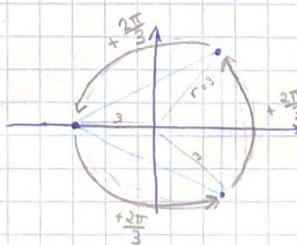
$$z^3 = -27 = 27e^{i\pi}$$

$$z_k = 3e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{2K\pi}{3})}, K \in \{0, 1, 2\}$$

$$z_0 = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_1 = -3$$

$$z_2 = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i = \overline{z_0}$$



$$r = \sqrt[3]{27} = 3$$

EXERCÍCIOS:

1) Solução da equação $z^4 = -81i \rightarrow z^4 = 81e^{-\frac{\pi}{2}i}$

$$z_k = \sqrt[4]{81} e^{(-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2})}, k \in \{0, 1, 2, 3\} \quad z_k = 3 e^{(-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}), k \in \{0, 1, 2, 3\}}$$

$$\begin{aligned} z_0 &= 3e^{-\frac{\pi}{8}i} \\ z_1 &= 3e^{\frac{3\pi}{8}i} \end{aligned} \quad \begin{aligned} z_2 &= 3e^{\frac{5\pi}{8}i} \\ z_3 &= 3e^{\frac{7\pi}{8}i} \end{aligned}$$

2) Restantes raízes quartas, sabendo que $z_1 = 1 + 2i$

$$+ \frac{2\pi}{4} = + \frac{\pi}{2} \rightarrow x e^{i\frac{\pi}{2}} = xi$$

$$z_2 = z_1 \times i = (1+2i)i = -2+i$$

$$z_3 = z_2 \times i = -1-2i$$

$$z_0 = z_3 \times i = 2-i //$$

extra: área do polígono

$$r = |1+2i| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} r^2 \times \frac{\pi}{2} = \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{5})^2 \times (\sqrt{5})^2 = \\ &= 25 // \end{aligned}$$

3) a) $z^3 - 2iz = 0$ ($\Rightarrow$)

$$\Rightarrow z(z^2 - 2i) = 0 \quad \Rightarrow z = 0 \vee z^2 = 2i \quad \Rightarrow z = 0 \vee |z|^2 e^{2i\theta} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\begin{cases} |z|^2 = 2 \\ 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z_0 &= 0 \\ z_1 &= \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \\ z_2 &= \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}} // \end{aligned}$$

$$\text{b) } z^3 = 3-3i \quad \Rightarrow |z|^3 e^{3i\theta} = \sqrt{18} e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad \Rightarrow \begin{cases} |z|^3 = \sqrt{18} \\ 3\theta = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{C.A. } |3-3i| = \sqrt{18}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt[3]{18} \\ \theta = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[3]{18} e^{-i\frac{\pi}{12}} \\ z_1 &= \sqrt[3]{18} e^{i\frac{11\pi}{12}} \\ z_2 &= \sqrt[3]{18} e^{i\frac{23\pi}{12}} // \end{aligned}$$

$$\text{c) } \frac{z}{|z|} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \Rightarrow \frac{|z|e^{i\theta}}{|z|} = e^{i\theta} \quad \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{C.A. } |w| = 1$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{1} \wedge \theta \in [0, 2\pi] \quad \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{C.S.} = \{e^{i\frac{\pi}{6}}\},$$

$$\text{d) } z^4 - (z^3 - 27iz - 27) = 0 \quad \Rightarrow (z-i)(z^3 - 27i) = 0 \quad \Rightarrow z = i \vee z^3 = 27i$$

i é solução

$$\begin{array}{cccccc} 1 & -i & 0 & -27i & -27 & \\ i & \downarrow & i & 0 & 0 & 27 \\ 1 & 0 & 0 & -27i & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} |z|^3 = 27 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} |z| = 3 \\ \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{C.S.} = \{0; 3e^{i\frac{\pi}{6}}; 3e^{i\frac{5\pi}{6}}; 3e^{i\frac{3\pi}{2}}\} //$$

$$\begin{aligned} 4) \left(\frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\sin \theta + i \cos \theta} \right)^9 &= \left(\frac{e^{-i\theta}}{e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}} \right)^9 = e^{9i(-\theta - \frac{\pi}{2} + \theta)} = e^{-i\frac{9\pi}{2}} = \\ &= e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i // \end{aligned}$$

$$\text{C.A. } \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \right) = e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$$

5) Prova que $\bar{z}^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos(n\theta)$ ($z = e^{i\theta}$)

$$\frac{e^{-in\theta} + 1}{e^{-in\theta}} = e^{-in\theta} + e^{in\theta} = (\cos(n\theta) - i\sin(n\theta)) + (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = 2\cos(n\theta) //$$

$$\begin{aligned} 6) (z+i)(\bar{z}-i) &= |z+i|^2 \quad \Rightarrow |w|^2 = w\bar{w} \quad \Rightarrow (z+i)(\bar{z}-i) = \bar{z}\bar{z} - z\bar{i} + \bar{z}i + 1 = |z|^2 - z\bar{i} + \bar{z}i + 1 = \\ &= |z|^2 - (a+bi)i + (a+bi)i + 1 = \\ &= a^2 + b^2 + b - ai + b + ai + 1 = \\ &= a^2 + b^2 + 2b + 1 \quad \checkmark \\ &\Rightarrow |z+i|^2 = |a+(b+1)i|^2 = a^2 + b^2 + 2b + 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

7) $z = e^{i\alpha}$, $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$

Prova que

$$|z^2 - 1| = 2 \sin \alpha$$

c.A. $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2 \alpha$

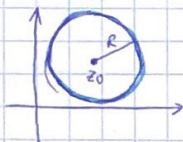
$$\begin{aligned} |z^2 - 1| &= |e^{2i\alpha} - 1| = |\cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha) - 1| = \\ &= \sqrt{(\cos(2\alpha) - 1)^2 + \sin^2(2\alpha)} = \sqrt{\cos^2(2\alpha) - 2\cos(2\alpha) + 1 + \sin^2(2\alpha)} = \\ &= \sqrt{2 - 2\cos(2\alpha)} = \\ &= \sqrt{2(1 - \cos(2\alpha))} = \sqrt{2(1 - (1 - 2\sin^2 \alpha))} = \\ &= \sqrt{4\sin^2 \alpha} = 2 \sin \alpha \end{aligned}$$

$\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[\leadsto 1^\circ \alpha \leadsto \sin \alpha > 0$

20. CONJUNTOS DE PONTOS DEFINIDOS POR CONDIÇÕES EM $\mathbb{C}$.

• Circunferência:

$$|z - z_0| = R$$



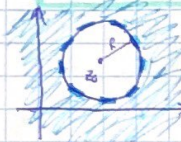
• Círculo

$$|z - z_0| \leq R$$



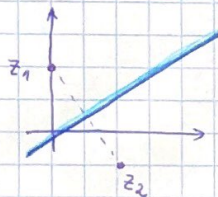
• Exterior do círculo

$$|z - z_0| > R$$



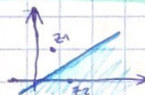
• Mediatriz de um segmento de reta:

$$|z - z_1| = |z - z_2|$$



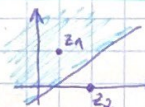
• Semiplano fechado que inclui z_2 :

$$|z - z_1| \geq |z - z_2|$$



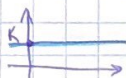
• Semiplano aberto que inclui z_1 :

$$|z - z_1| < |z - z_2|$$



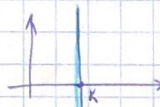
• Reta horizontal:

$$\text{Im}(z) = k$$



• Reta vertical:

$$\text{Re}(z) = k$$



NOTA:

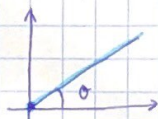
$[a \in \mathbb{R}] \quad \text{Im}(z+a) = \text{Im}(z) = y$

NOTA:

$\text{Re}(z+a) = \text{Re}(x+ia + yj) = x+a$
 $" = \text{Re}(z) + \text{Re}(a) = x+a$

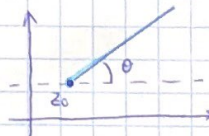
• Semirreta - origem no referencial:

$$\text{Arg}(z) = \theta$$



• Semirreta - origem em z_0 :

$$\text{Arg}(z - z_0) = \theta$$



$\text{Arg}\left(\frac{z}{w}\right) = \text{Arg}(z) - \text{Arg}(w)$

$\text{Arg}(z)^n = n \times \text{Arg}(z)$

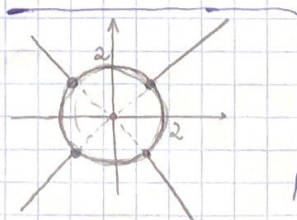
EXERCÍCIOS:

1) $|(1+\sqrt{3}i)(z-2i)| \leq 2 \Leftrightarrow |1+\sqrt{3}i| |z-2i| \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{1+3} |z-2i| \leq 2 \Leftrightarrow |z-2i| \leq 1$

2) $|iz| \geq 2 \wedge \text{Arg}(z) = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$



$|iz| = |i| |z| = |z|$



(30)

$$3) |z+2| = 2|z-1| \quad (z = x+yi) \quad |x+2+yi| = 2|x-1+yi| \quad (*)$$

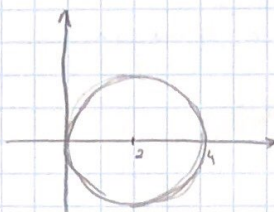
$$\Rightarrow (\sqrt{(x+2)^2+y^2})^2 = (2\sqrt{(x-1)^2+y^2})^2 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 = 4(x^2 - 2x + 1 + y^2) \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 3y^2 = 0 \quad (*) \quad x^2 - 4x + y^2 = 0 \quad (*)$$

$$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

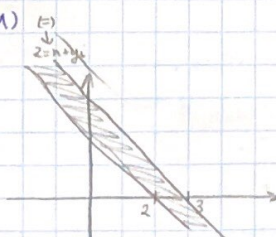
$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4 \quad \rightarrow \text{circunferência de centro } (2,0) \text{ e raio } 2$$



$$4) \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) \geq 2 \quad \wedge \quad \operatorname{Im}(2i-z) \geq \operatorname{Re}(z-1) \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow x + y \geq 2 \quad \wedge \quad 2 - y \geq x - 1 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow y \geq -x + 2 \quad \wedge \quad y \leq -x + 3$$



$$5) z \times \bar{z} = z + \bar{z} \quad (*) \quad x^2 + y^2 = 2x \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 = 0 \quad (*) \quad (x-1)^2 + y^2 = 1$$

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$



$$6) 0 \leq \operatorname{Arg}(z-i)^3 \leq \pi \quad \wedge \quad \frac{5\pi}{4} \leq \operatorname{Arg}\left(\frac{z-2}{i-1}\right) \leq \frac{7\pi}{4}$$

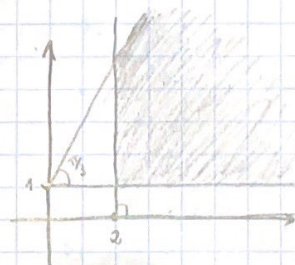
$$\operatorname{Arg}(z-i)^3 = 3 \cdot \operatorname{Arg}(z-i)$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z-2}{i-1}\right) = \operatorname{Arg}(z-2) - \operatorname{Arg}(i-1) =$$

$$= \operatorname{Arg}(z-2) - \frac{3\pi}{4}$$

$$0 \leq 3 \operatorname{Arg}(z-i)^3 \leq \pi \quad \wedge \quad \frac{5\pi}{4} \leq \operatorname{Arg}(z-2) + \frac{3\pi}{4} \leq \frac{7\pi}{4} \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \operatorname{Arg}(z-i) \leq \frac{\pi}{3} \quad \wedge \quad \frac{2\pi}{3} \leq \operatorname{Arg}(z-2) \leq \frac{5\pi}{4}$$



$$|z| e^{i\theta}$$

$$|z|^3 e^{3i\theta}$$

$$\frac{|z|}{|w|} = \frac{|z|}{|w|} e^{i(\theta-\phi)}$$