

LÓGICA

matemática

(pg. 108 - 128)
V.1

Símbolos:

- $\Leftrightarrow$ EQUIVALÊNCIA $\rightarrow$ mesmo valor lógico ($V \Leftrightarrow V / F \Leftrightarrow F$)
- $\sim$ NEGAÇÃO $\rightarrow \sim(\sim p) \Leftrightarrow p$
- $\wedge$ CONJUNÇÃO $\rightarrow p \wedge q \Leftrightarrow V$, se $V \wedge V$
- $\vee$ DISJUNÇÃO $\rightarrow p \vee q \Leftrightarrow F$, se $F \vee F$
- $\Rightarrow$ IMPLICAÇÃO $\rightarrow p \Rightarrow q \Leftrightarrow F$, se $V \Rightarrow F$

Propriedades:

- Elemento neutro $\rightarrow p \wedge V \Leftrightarrow p$ | $p \vee F \Leftrightarrow p$
- Elemento absorvente $\rightarrow p \wedge F \Leftrightarrow F$ | $p \vee V \Leftrightarrow V$
- Distributiva $\rightarrow p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow p \wedge q \vee p \wedge r$
- 1ªs Leis de De Morgan $\begin{cases} \rightarrow \sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q \\ \rightarrow \sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q \end{cases}$
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$
- $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
- Ordem: 1º - $\sim$
2º - $\wedge, \vee$
3º - $\Leftrightarrow, \Rightarrow$

CONDIÇÕES

Impossíveis

Possíveis

Universais

Não Universais

Quantificador

$\oplus$

Condição

=

Proposição (com valor lógico)

Quantificadores:

$\forall$ UNIVERSAL $\begin{cases} \bullet \text{ "para todo"} \\ \bullet \forall x, p(x) \\ \bullet V, \text{ se a condição é universal} \end{cases}$

$\exists$ EXISTENCIAL $\begin{cases} \bullet \text{ "existe pelo menos"} \\ \bullet \exists x: p(x) \\ \bullet F, \text{ se a condição é impossível} \end{cases}$

2ªs Leis de De Morgan $\begin{cases} \rightarrow \sim(\forall x \in U, p(x)) \Leftrightarrow \exists x \in U: \sim p(x) \\ \rightarrow \sim(\exists x \in U: p(x)) \Leftrightarrow \forall x \in U, \sim p(x) \end{cases}$

RAÍZES

$$\bullet a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$\bullet a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\bullet \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\bullet a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

$$\bullet (\sqrt[n]{a^m}) = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$\bullet \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$$

$$\bullet \sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{a}$$

$$\bullet \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

(1)

Racionalizar:

$$\cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cdot \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{2\sqrt[3]{4}}{2}$$

$$\cdot \frac{1}{2-\sqrt{2}} = \frac{1}{2-\sqrt{2}} \times \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4-2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

$$\cdot \frac{3}{5\sqrt{2}} = \frac{3}{5\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{5(\sqrt{2})^2} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$$

GEOMETRIA PLANO

Distância de A a B: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

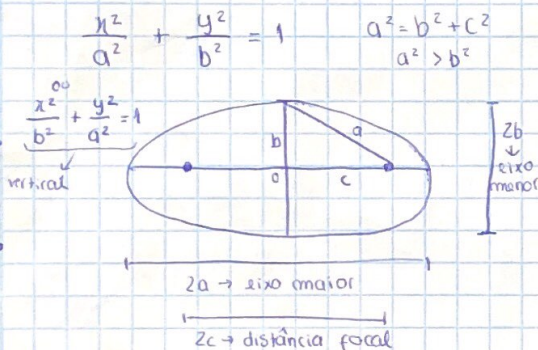
Ponto médio entre A e B: $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$

Mediatriz de A e B: $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2$

Eq. da circunferência: $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$

Eq. do círculo: $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 \leq R^2$

~~ELIPSE~~
não sai!!



ESPAÇO

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$

$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 + (z - z_B)^2$

$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = R^2$

$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 \leq R^2$

eixos coordenados:

$Oz (z) \rightarrow (x=0 \wedge y=0)$ D cotas
 $Oy (y) \rightarrow (x=0 \wedge z=0)$ D ordenadas
 $Ox (x) \rightarrow (y=0 \wedge z=0)$ D abscissas

planos coordenados:

$xOy \rightarrow z=0$
 $xOz \rightarrow y=0$
 $yOz \rightarrow x=0$



Vetores:

Norma de um vetor: $\|\vec{u}\| = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2}$

$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2}$

$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3$

Vetor $\vec{AB}$: $\vec{AB} = B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A)$

$\vec{AB} = B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

Eq. vetorial: $(x, y) = (x_A, y_A) + k(\vec{u}, \vec{v})$,
parâmetro vetor diretor

$(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + k(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

$k \in \mathbb{R}$
reta AB

$k \in \mathbb{R}^+$
semirreta AB

$k \in [0, 1]$
segmento de reta AB

$k \in]-\infty, 1]$
semirreta BA

Vetores colineares:

$\vec{u} = \lambda \vec{v} \rightarrow$ paralelos ou
com a mesma
direção

$y = ax + b$
Eq. reduzida

$a = \frac{u_2}{u_1} = \frac{y}{x}$
 $b = y - ax$

FUNÇÕES

- conjuntos A e B
 $\hookrightarrow f: A \rightarrow B$

$\rightarrow$ cada elemento x de A associa um elemento único de B

- Domínio
 $D_f = A$

- Conjunto de chegada
 $CC_f = B$

- Contradomínio
 $D'_f = f(A)$

$\rightarrow$ exemplos:

$$D_f = A = \{1, 2, 3\}$$

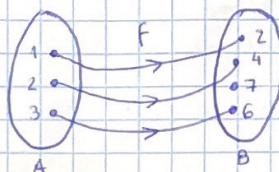
$$D'_f = \{2, 4, 6\}$$

$$CC_f = B = \{2, 4, 6\}$$

• Tabela

x	1	2	3
$f(x)$	2	4	6

• Diagrama de setas

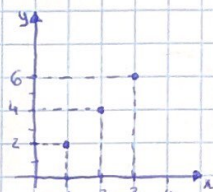


• Expressão algébrica

$$f(x) = 2x$$

$$D_f = \{1, 2, 3\}$$

• Gráfico



$$G_f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$$

• Restrição de uma função

$$f|_C : C \cap A \rightarrow B, \text{ tal que } \forall x \in C \cap A, f|_C(x) = f(x)$$

► FUNÇÃO INJETIVA

$\hookrightarrow$ não há objetos diferentes com a mesma imagem

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$\hookrightarrow$ exemplos:

• função afim $\rightarrow$
 E injetiva.
 $(a \neq 0)$

Sejam $x_1, x_2 \in B$

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow ax_1 + b = ax_2 + b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ax_1 = ax_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Logo, f é injetiva.

• função quadrática $\rightarrow$
 Não é injetiva.

Sejam $x_1, x_2 \in B$

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow (x_1)^2 = (x_2)^2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \vee x_1 = -x_2$$

$$\Leftrightarrow (x_1)^2 - (x_2)^2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0 \vee x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \vee x_1 = -x_2$$

► FUNÇÃO SOBREJETIVA

$\hookrightarrow$ o contradomínio coincide com o conjunto de chegada

$$\forall y \in B, \exists x \in A : y = f(x)$$

$\hookrightarrow$ exemplos:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

X (n/ n neg)

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$\checkmark$ (reta infinita)

Sejam $y \in \mathbb{R}$,
 $y = f(x) \Leftrightarrow y = ax + b \Leftrightarrow ax = y - b \Leftrightarrow x = \frac{y-b}{a} \in D_f$
 $a \neq 0$

Como $f\left(\frac{y-b}{a}\right) = y$, $\forall y \in \mathbb{R}$, então f é sobrejetiva.

► FUNÇÃO BIJETIVA
 $\hookrightarrow$ injetiva + sobrejetiva

► FUNÇÃO COMPOSTA
 $\hookrightarrow f: D_f \rightarrow A$ e $g: D_g \rightarrow B$
 $\searrow$
 $g \circ f: D_{g \circ f} \rightarrow B$

$- D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$

$- g \circ f(x) = g(f(x))$

► FUNÇÃO IDENTIDADE

$\hookrightarrow Id_A: A \rightarrow A$

$\rightarrow \forall x \in A, Id_A(x) = x$

► FUNÇÃO INVERSA

$\hookrightarrow f: A \rightarrow B$ bijetiva

$\cdot (f^{-1})^{-1} = f$

$\rightarrow f^{-1}: B \rightarrow A$

$\rightarrow y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

* Caracterizar uma função

- expressão
- domínio

• FUNÇÃO REAL DE VARIÁVEL REAL ($\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

$\hookrightarrow f: A \rightarrow B$

$\hookrightarrow$ f.r.v.r, se $A, B \subset \mathbb{R}$

• $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : B(x) \neq 0\}$

• $f(x) = \sqrt{A(x)}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : A(x) \geq 0\}$

- Zeros de uma função

$\hookrightarrow$ objetos com imagem 0 ($f(x) = 0$)
 $\in D_f$

- PARIDADE

$\hookrightarrow$ Função PAB

$\rightarrow x \in D_f, -x \in D_f$ e $f(x) = f(-x)$

$\rightarrow$ objetos simétricos têm a mesma imagem (função quadrática)

$\rightarrow$ eixo Oy de simetria



$\hookrightarrow$ Função IMPAR

$\rightarrow x \in D_f, -x \in D_f$ e $f(-x) = -f(x)$

$\rightarrow$ objetos simétricos têm imagens diferentes

$\rightarrow$ simétrico à origem do referencial

$\rightarrow$ se $0 \in D_f$, então $f(0) = 0$



• TRANSFORMAÇÕES

① $g(x) = f(x) + d$

Translação vertical $\rightarrow \vec{v}(0, d)$

- ↳ para cima se $d > 0$
- ↳ para baixo se $d < 0$

② $g(x) = f(x - c)$
↳ $D_g = \{x + c : x \in D_f\}$

Translação horizontal

- ↳ para a direita se $c > 0$
- ↳ para a esquerda se $c < 0$

③ $g(x) = af(x)$

Contração vertical de fator $a \rightarrow 0 < a < 1$

Dilatação vertical de fator $a \rightarrow a > 1$

④ $g(x) = f(ax)$
↳ $D_g = \{\frac{x}{a} : x \in D_f\}$

Dilatação horizontal de fator $\frac{1}{a} \rightarrow 0 < a < 1$

Contração horizontal de fator $\frac{1}{a} \rightarrow a > 1$

⑤ $g(x) = -f(x)$

Simetria vertical

- ↳ reflexão do eixo Ox

⑥ $g(x) = f(-x)$

Simetria horizontal

- ↳ reflexão do eixo Oy

• INTERVALOS DE MONOTONIA

↳ $A \subset D_f$

- Função estritamente crescente (em A)

em sentido lato

↳ $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ou $f(x_1) \leq f(x_2)$

- Função estritamente decrescente (em A)

em sentido lato

↳ $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ou $f(x_1) \geq f(x_2)$

- Função constante (em A)

↳ $\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2)$

- Função (estritamente) monotônica

↳ se for estritamente crescente ou decrescente (em A)

↳ se for " " ou " em sentido lato (em A)

• EXTREMOS ABSOLUTOS

→ mínimo absoluto $\rightarrow f(a)$

↳ $\forall x \in D_f, f(a) \leq f(x)$

→ máximo absoluto $\rightarrow f(a)$

↳ $\forall x \in D_f, f(a) \geq f(x)$

NOTA: - Se $f(a)$ é máximo, então a é maximizante.
imagem ↗ ↘ ↖ ↙

- Se $f(a)$ é mínimo, então a é minimizante.

- Função afim e extremos

↳ $f(x) = ax + b, a \neq 0 \rightarrow$ não tem extremos

$a = 0 \rightarrow$ função constante, b é máximo e mínimo

► FUNÇÃO LIMITADA

- $m \leq M$

- $\forall x \in D_f, m \leq f(x) \leq M$

Vizinhanga

↳ $V_r(x_0) =]x_0 - r, x_0 + r[$

Extremos relativos ($r > 0$)

↳ $\forall x \in V_r(a) \cap D_f, f(a) \leq f(x)$

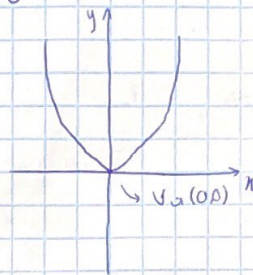
⑤

▶ FUNÇÃO QUADRÁTICA

$$\begin{aligned} \hookrightarrow f(x) &= ax^2 + bx + c, & a, b, c &\in \mathbb{R}, \text{ com } a \neq 0 \\ \hookrightarrow f(x) &= a(x-h)^2 + k, & a, b, c &\in \mathbb{R}, \text{ com } a \neq 0 \end{aligned}$$

$$V_{\Delta}(h, k)$$

$$\left[h = -\frac{b}{2a} \right] \quad V_{\Delta} \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right) \right)$$



- Zeros

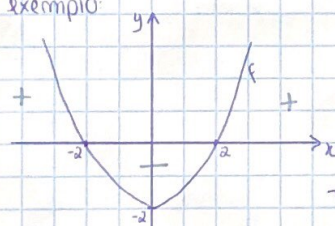
discriminante $\rightarrow \Delta$
 $\hookrightarrow (b^2 - 4ac)$

$\Delta > 0 \rightarrow 2 \text{ zeros}$
 $\Delta = 0 \rightarrow 1 \text{ zero}$
 $\Delta < 0 \rightarrow \text{sem zeros}$

- Sinal

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta < 0$ (não tem zeros)		
$\Delta = 0$ (tem 1 zero)		
$\Delta > 0$ (tem dois zeros)		

exemplo:



$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-2; 2[$$

Tabela de sinal:

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

- Inequações

exemplo:

$$2x^2 - 3x < 0$$

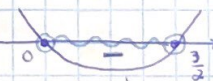
$\hookrightarrow 2 > 0 \rightarrow$ conv. para cima

$$\text{C.A.} \rightarrow 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{3}{2}$$



$$2x^2 - 3x < 0 \Leftrightarrow \ominus \leftarrow$$



$$\text{C.S.} =]0; \frac{3}{2}[$$

▶ FUNÇÕES DEFINIDAS POR RAMOS

exemplo:

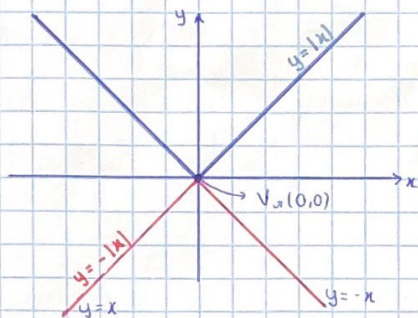
$$f(x) = \begin{cases} 0, 3 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0, 3 + 0,2(x-1) & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

► FUNÇÃO MÓDULO (ou valor absoluto)

$$f(x) = |x|$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$Df = \mathbb{R} \\ D'f = \mathbb{R}^*$$



$$f(x) = a|x-b| + c$$

$$(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$$

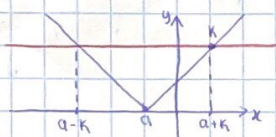
$$V_x(b, c)$$

⚠ $|x-2| = 2|x-3| = 4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow |x-2| = 4 + 2|x-3|$

- Condições

• Equações

$$|x-a| = k$$

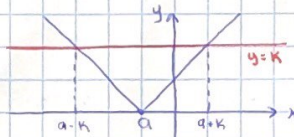


$$C.S. = \{k+a; a+k\}$$

$$\begin{aligned} x-a &= k \vee x-a = -k \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= k+a \vee x = a-k \end{aligned}$$

• Inequações

$$|x-a| \leq k \text{ ou } |x-a| \geq k$$



$$C.S. = [a-k; a+k] \text{ ou } C.S. =]-\infty; a-k] \cup [a+k; +\infty[$$

$$\begin{aligned} |x-a| \leq k &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x-a &\leq k \wedge x-a \geq -k \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &\leq k+a \wedge x \geq a-k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |x-a| \geq k &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x-a &\geq k \vee x-a \leq -k \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &\geq k+a \vee x \leq a-k \end{aligned}$$

- Composição com outra função

$$g(x) = |x|$$

$$f(x) \rightarrow$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$



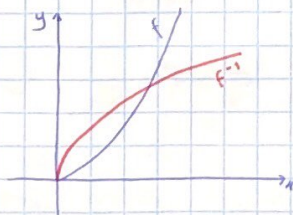
► FUNÇÕES COM RADICAIS QUADRÁTICOS E CÚBICOS

radicais quadráticos

$$f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \rightarrow f(x) = x^2$$

↳ bijetiva

$$\forall x \in \mathbb{R}_0^+, f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$



radicais cúbicos

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow f(x) = x^3$$

↳ bijetiva

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$



→ exemplo de uma equação envolvendo radicais quadráticos:

$$\begin{aligned} & 4 - \sqrt{1-x} = \sqrt{x+4} + 1 \Leftrightarrow (3 - \sqrt{1-x})^2 = (\sqrt{x+4})^2 \Rightarrow 9 - 6\sqrt{1-x} + 1 - x = x + 4 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (6\sqrt{1-x})^2 = (2x - 6)^2 \Rightarrow 36 - 36x = (2x - 6)^2 \Leftrightarrow 36 - 36x = 4x^2 - 24x + 36 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x(4x + 12) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3 \quad (C.S. = \{0; -3\}) \end{aligned}$$

Verificação: $x=0 \rightarrow 4 - \sqrt{1-0} = \sqrt{0+4} + 1 \Leftrightarrow 4 - 1 = 2 + 1 \Leftrightarrow 3 = 3 \quad \checkmark$
 $x=-3 \rightarrow 4 - \sqrt{1+3} = \sqrt{-3+4} + 1 \Leftrightarrow 4 - 2 = 1 + 1 \Leftrightarrow 2 = 2 \quad \checkmark$

→ exemplo de uma equação envolvendo radicais cúbicos:

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{x^2 - x} = x \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x^2 - x})^3 = (x)^3 \Rightarrow x^2 - x = x^3 \Leftrightarrow x^3 - x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x(x^2 - x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \\ & \quad (C.S. = \{0\}) \end{aligned}$$

→ exemplo de uma inequação envolvendo radicais quadráticos

$$\begin{aligned} & \sqrt{x-3} + \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow D = \{x \in \mathbb{R} : x-3 \geq 0 \wedge x \geq 0\} \\ & \quad x \geq 3 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow (x \geq 3) \\ & \Leftrightarrow (\sqrt{x-3} + \sqrt{x})^2 < 3^2 \Leftrightarrow x-3 + 2\sqrt{x^2-3x} + x < 9 \wedge x \geq 3 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-3x} < 12 - 2x \wedge x \geq 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x} < 6-x \wedge x \geq 3 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (\sqrt{x^2-3x})^2 < (6-x)^2 \wedge x \geq 3 \wedge x \leq 6 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x^2-3x < 36-12x+x^2 \wedge x \geq 3 \wedge x \leq 6 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x < 4 \wedge x \geq 3 \wedge x \leq 6 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x < 4 \wedge x \geq 3 \Leftrightarrow 3 \leq x < 4 \\ & \quad (C.S. = [3; 4]) \end{aligned}$$

Diagrama de conjuntos:

→ exemplo de uma inequação envolvendo radicais cúbicos

$$\sqrt[3]{x+2} < 4 \Leftrightarrow x+2 < 4^3 \Leftrightarrow x < 62 \quad (C.S. =]-\infty; 62[)$$

POLINÔMIOS

exemplo: $12x^2 - 9x - 3$

$P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$

- grau é o maior do monômio

- se $P(x) = 0$, então é polinômio nulo

• monômio: $ax^2 \rightarrow 2x^2$

$2x^2 \leftarrow$ parte literal $\rightarrow$ grau 2 $\rightarrow x^2$

- constante (não nulo) $\rightarrow$ grau 0

$\hookrightarrow$ ex: $7 \rightarrow$ grau 0

• Multiplicação de polinômios

- $A(x) \rightarrow$ grau m
- $B(x) \rightarrow$ grau n

$$A(x) \times B(x) \rightarrow \text{grau } m+n$$

• Divisão inteira de polinômios

← NORMAL

→ exemplo: $x^5 - 3x^3 - 10x \div x^3 - 5x$

sempre o simétrico

$$\begin{array}{r} x^5 + 0x^4 - 3x^3 + 0x^2 - 10x + 0 \\ -x^5 + 5x^3 - 10x \\ \hline 2x^3 + 0x^2 - 10x + 0 \\ -2x^3 + 10x \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x^3 - 5x$$

$$x^2 + 2$$

$$D = \text{Dividendo} = x^5 - 3x^3 - 10x$$

$$d = \text{divisor} = x^3 - 5x$$

$$Q = \text{Quociente} = x^2 + 2$$

$$R = \text{Resto} = 0$$

$$\begin{array}{c} D \quad d \\ A(x) \quad B(x) \\ R(x) \quad Q(x) \end{array}$$

⇓

$$D = d \times Q + R \rightarrow A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$$

Se $R=0$, então:

- ↳ $A(x)$ é múltiplo de $B(x)$
- ↳ $A(x)$ é divisível por $B(x)$
- ↳ $B(x)$ é divisor de $A(x)$

$$① \frac{x^5}{x^3} = x^2$$

$$② x^2 \times x^3 = x^5 \xrightarrow{\text{sim.}} -x^5$$

$$③ x^2 \times (-5x) = -5x^3 \xrightarrow{\text{sim.}} 5x^3$$

$$④ -3x^3 + 5x^3 = 2x^3$$

$$⑤ \frac{2x^3}{x^3} = 2$$

$$⑥ 2 \times x^3 = 2x^3 \xrightarrow{\text{sim.}} -2x^3$$

$$⑦ 2 \times (-5x) = -10x \xrightarrow{\text{sim.}} 10x$$

← REGRA DE RUFFINI

→ exemplo: $2x^4 - 5x^3 - x^2 + 3x - 4 \div x - 2$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} x-2=0 \Leftrightarrow x=2 & 2 & -5 & -1 & 3 & -4 \\ & \downarrow & & & & \\ ② & & 4 & -2 & -6 & -6 \\ \hline & 2 & -1 & -3 & -3 & -10=R \end{array}$$

$$① 2 \times 2 = 4$$

$$② -5 + 4 = -1$$

$$③ 2 \times (-1) = -2$$

$$④ -1 - 2 = -3$$

$$⑤ 2 \times (-3) = -6$$

$$⑥ 3 - 6 = -3$$

$$⑦ 2 \times (-3) = -6$$

$$⑧ -4 - 6 = -10$$

$$Q(x) = 2x^3 - x^2 - 3x - 3$$

$$R(x) = -10$$

{ divisor $\rightarrow ax+b$ }

$$ax+b = a \left(x - \frac{b}{a} \right)$$

→ exemplo: $2x^2 + 5x - 6 \div 2x - 1$

$$2x - 1 = 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) \quad \text{ou} \quad 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 5 & -6 \\ \frac{1}{2} & \downarrow & & \\ & 2 & 6 & -3=R \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 + 5x - 6 &= (2x+6) \left(x - \frac{1}{2} \right) - 3 = \\ &= (x+3) 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) - 3 = \\ &= (x+3) (2x-1) - 3 \end{aligned}$$

$$Q(x) = 2x + 6 \rightarrow \text{Quociente} = \frac{Q(x)}{a} = \frac{2x+6}{2} = x+3$$

$$R(x) = -3$$

• Teorema do Resto

$$\rightarrow \frac{P(x)}{x-a} = P(a) = R$$

→ zero/raiz: $\{a\}$
 $P(a) = 0$

Corolário/Consequência:

↳ $P(x)$ é divisível por $x-a$, $\forall a \in \mathbb{R}$,
 $\frac{P(x)}{x-a} = 0 \Leftrightarrow P(a) = 0$

⑨

• Fatorização de polinômios

$$\hookrightarrow P(x) = a(x-a_1)(x-a_2) \dots \rightarrow a \text{ é o coeficiente de maior grau}$$

→ exemplo: $2x^2 - 4x + 2$
 zeros = 1 $\rightarrow 2(x^2 - 2x + 1) = 2(x-1)^2 = 2 \underbrace{(x-1)(x-1)}_{g^2}$

$$2x^2 - 4x + 2 = 2(x-1)^2$$

• Multiplicidade da raiz de um polinômio

$$\hookrightarrow \frac{P(x)}{(x-a)^m} = 0 \rightarrow \text{multiplicidade } m$$

$$\rightarrow Q(a) \neq 0 \rightarrow P(x) = (x-a)^m Q(x)$$

• Teorema das raízes inteiras

→ exemplo: $p(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$

① divisores inteiros de -2 : $2, -2, 1, -1$

② verificação: $p(1) = 1^3 - 1^2 + 2 \cdot 1 - 2 = 0 \rightarrow$ logo, 1 é raiz
 $p(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 2 = -6 \rightarrow$ logo, -1 não é raiz
 (...)

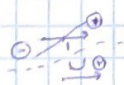
② ESTUDAR O SINAL:

③ Fatorizar o polinômio em fatores de grau ≤ 2

$$\begin{array}{r|rrrr} & x^3 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & \downarrow & 1 & 0 & 2 \\ & 1 & 0 & 2 & 0=R \end{array}$$

$$P(x) = (x-1)(x^2+2)$$

④ Construir tabela de sinal



x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	-	0	+
x^2+2	+	+	+
$P(x)$	-	0	+

C.A.

$$x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \checkmark$$

$$x^2+2=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{-2} \times$$

* (mº ímpar de $\ominus \rightarrow \ominus$)*
 (mº par de $\ominus \rightarrow \oplus$)

$$\left[\begin{array}{l} p(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]1; +\infty[\\ p(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 1[\end{array} \right]$$