

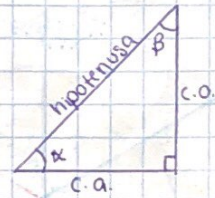
TRIGONOMETRIA

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{cases}$$

SOM $\sin \alpha = \frac{\text{cat. oposto}}{\text{hip.}}$

CAM $\cos \alpha = \frac{\text{cat. adjacente}}{\text{hip.}} = \sin \beta$

TOA $\tan \alpha = \frac{\text{cat. oposto}}{\text{cat. adjacente}}$



FFT $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \xrightarrow{+\cos^2(\alpha)} 1 + \tan^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$

$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

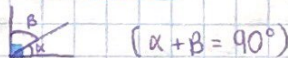
Lei dos senos



$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

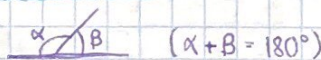
Ângulos:

- complementares



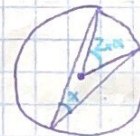
$$\begin{cases} \sin \alpha = \cos \beta \\ \cos \alpha = \sin \beta \end{cases}$$

- suplementares



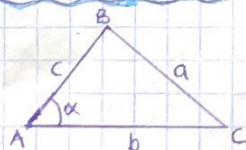
$$\begin{cases} \sin \alpha = \sin \beta \\ \cos \alpha = -\cos \beta \end{cases}$$

- côncavo e convexo



Lei dos cossenos

ou Teorema de Carnot



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$\xrightarrow{\sin \alpha} \frac{\sin \alpha}{a}$$

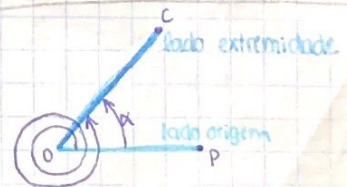
Ângulo:

• orientado $\rightarrow \alpha =] -360^\circ, 360^\circ [$

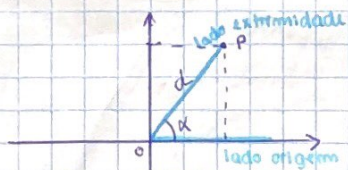
• generalizado

$$\text{PÔC} = \alpha + K \times 360^\circ$$

$K \in \mathbb{Z}$



2

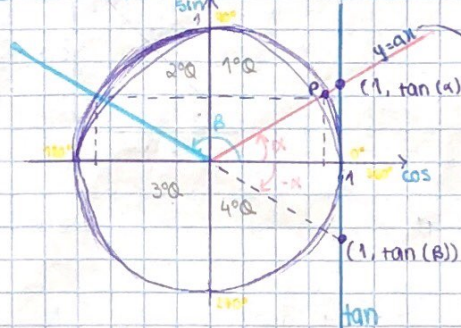


$$\sin \alpha = \frac{y_p}{d}$$

$$\cos \alpha = \frac{x_p}{d}$$

$$\tan \alpha = \frac{y_p}{x_p} \rightarrow \neq 0$$

CIRCULO/CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMETRICA



$$P_\alpha (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$$

$$\begin{cases} y = \alpha x \\ \alpha = \tan(\alpha) \end{cases}$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

$$\rightarrow \tan(\beta) = -\tan(\alpha) = \tan(-\alpha)$$

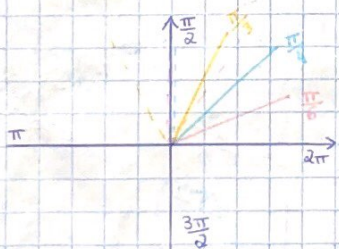
$$\begin{cases} \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \\ \cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \end{cases}$$

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
1ºQ	+	+	+
2ºQ	+	-	-
3ºQ	-	-	+
4ºQ	-	+	-

RADIANO

→ amplitude de um ângulo de centro de uma circunferência com arco de comprimento igual ao raio

$$\begin{aligned} 2\pi \text{ rad} &\rightarrow 360^\circ \\ \pi \text{ rad} &\rightarrow 180^\circ \\ \pi/2 \text{ rad} &\rightarrow 90^\circ \end{aligned}$$



rad	α	sin	cos	tan
π/6	30°	1/2	√3/2	√3/3
π/4	45°	√2/2	√2/2	1
π/3	60°	√3/2	1/2	√3

$$\begin{aligned} \cos(x \pm \pi) &= -\cos x \\ \sin(x \pm \pi) &= -\sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\pi - x) &= -\cos x \\ \sin(\pi - x) &= \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(x + \pi/2) &= -\sin x \\ \sin(x + \pi/2) &= \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(x - \pi/2) &= \sin x \\ \sin(x - \pi/2) &= -\cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\pi/2 - x) &= \sin x \\ \sin(\pi/2 - x) &= \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi \text{ rad} &= \pi r \\ \pi/2 \text{ rad} &= y(1) \end{aligned}$$

FUNÇÕES

3

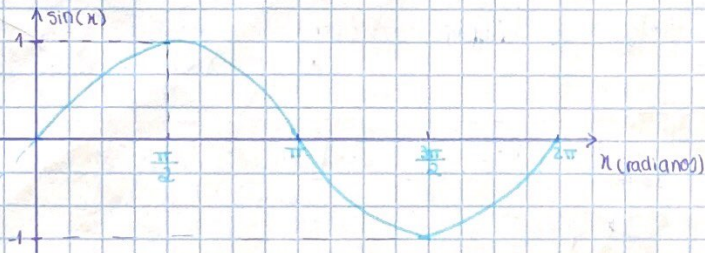
periódicas:

↳ N° real $P > 0$
 ↳ função periódica de período P (ou P -periódica)

Período fundamental

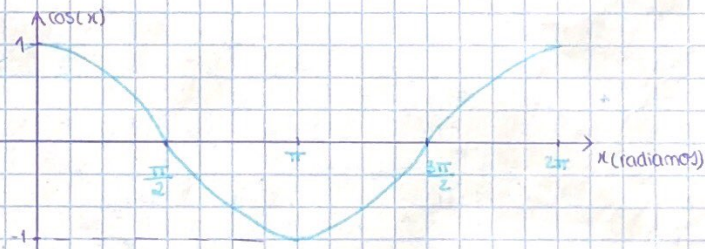
↳ $P_0 > 0$ ↳ período positivo mínimo de f

seno



- Domínio = $\mathbb{R}$
- Contradomínio = $[-1; 1]$
- Período fundamental = $P_0 = 2\pi$
- Paridade: ímpar $\rightarrow (\sin(-x) = -\sin(x))$
 $x \in D_f ; -x \in D_f$
- Zeros: $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Minimizantes: $\sin(x) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Maximizantes: $\sin(x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

coseno



- Domínio = $\mathbb{R}$
- Contradomínio = $[-1; 1]$
- Período fundamental = $P_0 = 2\pi$
- Paridade: par $\rightarrow (\cos(-x) = \cos(x))$
 $x \in D_f ; -x \in D_f$
- Zeros: $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Minimizantes: $\cos(x) = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Maximizantes: $\cos(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

TRANSFORMAÇÕES

eixo $yy \rightarrow D_f$

- $f(x) + d$
- $a f(x)$
- $-f(x)$

eixo $xx \rightarrow D_f$

- $f(x - c)$
- $f(ax) \rightarrow$ fator $\uparrow a$
- $f(-x)$

$$g(x) = a + b \cdot \sin(cx + d)$$

$$P_0 = \frac{2\pi}{|c|}$$

↳ período

no este afeta período-P

$$P_0 = \frac{\pi}{|c|}$$

$$h(x) = a + b \cdot \tan(cx + d)$$

4

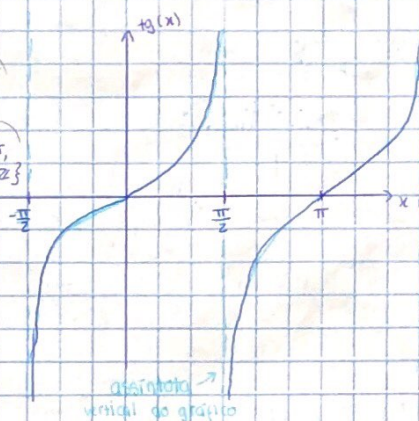
tangente

- Domínio = $\{x \in \mathbb{R} : \cos(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{x : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- Contradomínio = $\mathbb{R}$

• Período fundamental = π

- Zeros: $\tan(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Monotonia: crescente nos intervalos contidos no seu domínio

• Paridade: ímpar $\rightarrow (\tan(-x) = -\tan(x))$
 $x \in D_f, -x \in D_f$



FUNÇÕES INVERSAS $\rightarrow [f^{-1}(x)]$ tem de ser bijetiva

* $f(x) = \sin(x)$

$$f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$$

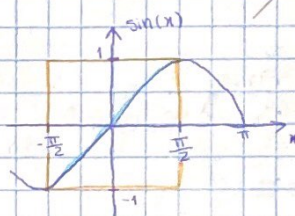
$$f^{-1}(x) = \sin^{-1}(x) = \arcsin(x)$$

$$f: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

1/4:0

exemplo:

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$



* $g(x) = \cos(x)$

$$g: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

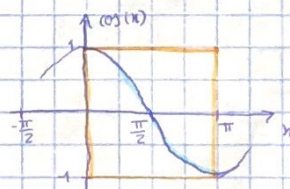
$$g^{-1}(x) = \cos^{-1}(x) = \arccos(x)$$

$$g: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

1/2:0

exemplo:

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$



* $h(x) = \tan(x)$

$$h:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$$

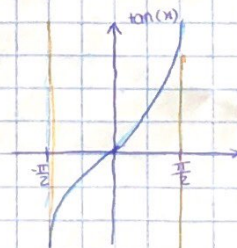
$$h^{-1}(x) = \tan^{-1}(x) = \arctan(x)$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

1/4:0

exemplo:

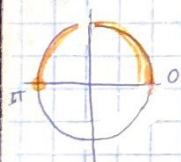
$$\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$



~~unit(x)~~



~~cos(x)~~



~~tan(x)~~



EQUAÇÕES TRIGONÔMETRICAS

$$(2y)^2 = 9 + y^2 \quad \textcircled{5}$$

$$\bullet \sin x = \sin \alpha \quad (\Leftrightarrow) \quad x = \alpha + 2k\pi \quad \vee \quad x = (\pi - \alpha) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet \cos x = \cos \alpha \quad (\Leftrightarrow) \quad x = \alpha + 2k\pi \quad \vee \quad x = -\alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet \tan x = \tan \alpha \quad (\Leftrightarrow) \quad x = \alpha + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

* Rever ex: 34, pág. 97 (volume 1)

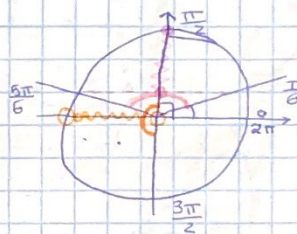
INEQUAÇÕES TRIGONÔMETRICAS

↳ Imaginar círculo trigonométrico.

exemplo: $\sin x \leq \frac{1}{2} \wedge \cos x < 0 \wedge x \in [0, 2\pi] (\Leftrightarrow)$

$$(\Leftrightarrow) x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right] \cup \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[(\Leftrightarrow)$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right]$$



* Como calcular D_f ?

exemplo: $f(x) = 2 - 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

$$-1 \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$$

$$3 \geq -3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geq -3$$

$$5 \geq 2 - 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geq -1$$

$$D_f = [-1, 5]$$

* Prove que f é $\frac{\pi}{2}$ -periódica.

exemplo: $f(x) = 1 + \sqrt{3} \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \quad (x \in D_f)$

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sqrt{3} \tan\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{3}\right) = 1 + \sqrt{3} \tan\left(2x + \pi - \frac{\pi}{3}\right) =$$



$$= 1 + \sqrt{3} \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = f(x)$$

$$\tan(2x + \pi) = \tan(2x)$$

logo, f é $\frac{\pi}{2}$ -periódica.

* Quantas soluções tem a equação $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{2}{7}$, no intervalo $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{13\pi}{3} \right]$?

① fazer na calculadora gráfica o gráfico das funções

$$f_1(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \quad \text{e} \quad f_2(x) = \frac{2}{7}$$

② adaptar a janela para o intervalo apresentado (dos x)

③ contar o número de interseções entre as funções

6

GEOMETRIA ANALÍTICA

INCLINAÇÃO DE UMA RETA: amplitude do ângulo convexo

- reta oblíqua:

↳ de $]0^\circ; 90^\circ[$ ▶ declive positivo

↳ de $]90^\circ; 180^\circ[$ ▶ declive negativo

- $90^\circ \rightarrow$ não existe tangente ▶ não tem declive.

- $0^\circ/180^\circ \rightarrow \begin{matrix} \text{tg } 180^\circ = 0 \\ \text{tg } 0^\circ = 0 \end{matrix} \rightarrow$ declive é 0

$$m_{AB} = \tan(\alpha)$$

para $\alpha \in [0; 180^\circ[\setminus \{90^\circ\}$

* $A \rightarrow (0; 2) \quad B \rightarrow (3; 0)$
 $m_{AB} = \frac{0-2}{3-0} = -\frac{2}{3} \rightarrow \text{tg}^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) = -34^\circ = \beta$
 $\alpha = 180^\circ - |\beta| = 180^\circ - 34^\circ = 146^\circ$

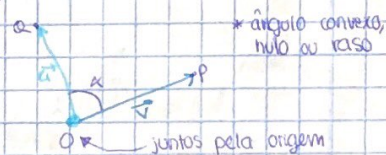
Produto escalar de vetores

$$\underbrace{\vec{u} \cdot \vec{v}}_{\text{produto interno escalar}} \neq \underbrace{\vec{u} \times \vec{v}}_{\text{produto externo}}$$

$$(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\alpha^{\wedge} \vec{v})$$

$$(\vec{u} \cdot \vec{v}) = u_1 v_1 + u_2 v_2 \quad \begin{matrix} \vec{u} \rightarrow (u_1, u_2) \\ \vec{v} \rightarrow (v_1, v_2) \end{matrix}$$

Ângulo entre 2 vetores:



$$* \quad 0^\circ \leq \alpha^{\wedge} \vec{v} \leq 180^\circ$$

- Propriedades:

- norma: $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 \quad (\times \cos 0^\circ)$

* se $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \rightarrow$ ângulo obtuso

- comutativa: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

* se $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \rightarrow$ ângulo agudo

- associativa mista: $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$

- distributiva: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

RETAS PERPENDICULARES (no plano)

$r: (x, y) = (x_a, y_a) + k(r_x, r_y), \quad k \in \mathbb{R} \rightarrow m_r = \frac{r_y}{r_x}$

$s: (x, y) = (x_b, y_b) + k(s_x, s_y), \quad k \in \mathbb{R} \rightarrow m_s = \frac{s_y}{s_x}$

$$\boxed{r \perp s} \Leftrightarrow \vec{r} \perp \vec{s} \Leftrightarrow \vec{r} \cdot \vec{s} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1, m_r) \cdot (1, m_s) = 0 \Leftrightarrow 1 + (m_r \cdot m_s) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m_r \cdot m_s = -1}$$

ângulo entre 2 retas:

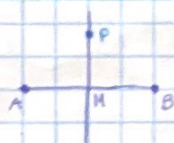
$$\alpha \rightarrow \text{ângulo convexo, nulo ou raso}$$

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

LUGARES GEOMÉTRICOS no plano

7

* Mediatriz do segmento de reta [AB]



$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

exercício: Condição para a mediatriz.

$$A \rightarrow (5,0)$$

$$B \rightarrow (1,4)$$

$$M \rightarrow \left(\frac{5+1}{2}, \frac{0+4}{2} \right) = (3,2)$$

P ∈ Mediatriz

$$P \rightarrow (x,y)$$

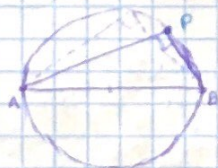
$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-4,4)$$

$$\overrightarrow{PM} = (x-3, y-2)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PM} = 0 \Leftrightarrow (-4,4) \cdot (x-3, y-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4y = 4x - 4 \Leftrightarrow y = x - 1$$

* Equação de uma circunferência de diâmetro [AB]



$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$$

exercício: Condição para a circunferência.

$$A \rightarrow (5,0)$$

$$B \rightarrow (1,4)$$

$$P \rightarrow (x,y)$$

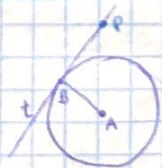
$$\overrightarrow{AP} = P - A = (x-5, y)$$

$$\overrightarrow{BP} = P - B = (x-1, y-4)$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x-1) + y(y-4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 8$$

* Reta tangente no ponto B de uma circunferência de centro A



$$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

exercício: Equação da reta tangente

$$A \rightarrow (5,0)$$

$$B \rightarrow (1,4)$$

$$P \rightarrow (x,y)$$

$$\overrightarrow{BP} = P - B = (x-1, y-4)$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-4,4)$$

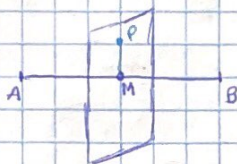
$$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow (x-1) \cdot (-4) + (y-4) \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = x + 3$$

8

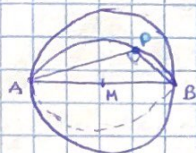
LUGARES GEOMÉTRICOS no espaço

* Plano mediador do segmento de reta $[AB]$



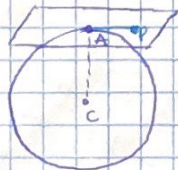
$$\vec{MP} \cdot \vec{AB} = 0$$

* Equação de uma superfície esférica



$$\vec{PA} \cdot \vec{PB} = 0$$

* Plano tangente a uma superfície esférica de centro C no ponto A



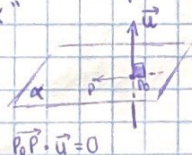
$$\begin{aligned} \vec{AP} \cdot \vec{CA} &= 0 \\ \vec{CP} \cdot \vec{CA} &= 0 \end{aligned}$$

ponto onde a
reta (de P) passa

Equações de planos no espaço

Vetor normal a um plano

↳ " $\vec{u} \perp \alpha$ "



$$\vec{P_0P} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{u} &= (u_1, u_2, u_3) \\ P_0 &= (x_0, y_0, z_0) \end{aligned}$$

$$\vec{n} = (a, b, c)$$

Equação de um plano:

$$u_1(x - x_0) + u_2(y - y_0) + u_3(z - z_0) = 0$$

Equação cartesiana do plano:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Equação vetorial de reta
com 2 pontos:
achar 2 pontos,
obter vetor

→ Modos para definir um plano:

3 pontos: $A_1(1, 0, 1) / B_1(1, 1, 0) / C_1(2, 0, 0)$

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= B - A = (0, 1, -1) \\ \vec{AC} &= C - A = (1, 0, -1) \end{aligned}$$

$$\vec{n} = (a, b, c)$$

Como os vetores não são
colineares, os pontos também
não o são logo, podem definir
um plano.

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, 1, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, 0, -1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{n} &= (c, c, c) \xrightarrow{c=1} \vec{n} = (1, 1, 1) \\ \text{equação do plano:} \\ x + y + z + d &= 0 \\ d &= -2 \in \mathbb{R} \rightarrow (2, 0, 0) \\ \rightarrow x + y + z - 2 &= 0 \end{aligned}$$

1 ponto e uma reta: $P_1(0, 2, -3) / r: (x, y, z) = (1, 1, 2) + K(1, 1, 1), K \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \vec{AP} &= P - A = (-1, 1, -5) \\ \vec{n} &= (a, b, c) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (-1, 1, -5) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, 1, 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2c \\ a = -3c \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{equação do plano:} \\ -3x + 2y + z + d &= 0 \\ \rightarrow 3x + 2y + z - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\vec{n} = (-3c, 2c, c) \xrightarrow{c=1} (-3, 2, 1)$$

2 retas não-paralelas:

$$r: (x, y, z) = (0, 2, 1) + K \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, K \in \mathbb{R}$$

$$s: (x, y, z) = (0, 2, 1) + K \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, K \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (-1, 2, 2) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-2, 0, 1) = 0 \end{cases} \quad [..]$$

Equação do plano:

$$2x - 3y + 4z + 2 = 0$$

2 retas paralelas: (c/ vetores colineares)

$$r: (x, y, z) = (1, 2, 4) + K \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, K \in \mathbb{R}$$

$$s: (x, y, z) = (0, 2, 1) + K \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, K \in \mathbb{R}$$

$$RS = S - R = (-1, 0, -3)$$

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (-1, 2, 2) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-1, 0, -3) = 0 \end{cases} \quad [..]$$

Equação do plano:

$$6x + y + 2z - 4 = 0$$

Condição de PARALELISMO de planos

$$\vec{v}_\alpha \text{ e } \vec{v}_\beta \Rightarrow \text{são colineares}$$

$$\alpha \text{ e } \beta \Rightarrow \text{são paralelos}$$

Condição de PERPENDICULARIDADE de planos

$$\vec{v}_\alpha \text{ e } \vec{v}_\beta \Rightarrow \text{são perpendiculares} \quad (\vec{v}_\alpha \cdot \vec{v}_\beta = 0)$$

$$\alpha \text{ e } \beta \Rightarrow \text{são perpendiculares}$$

Equação vetorial de um plano:

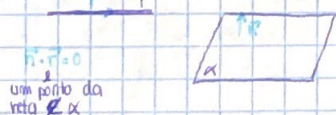
- $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não colineares e paralelos a plano α
- P: ponto no espaço

$$P = P_0 + s\vec{u} + t\vec{v}, s, t \in \mathbb{R}$$

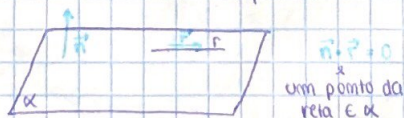
$$\begin{cases} x = x_0 + su_1 + tv_1 \\ y = y_0 + su_2 + tv_2 \\ z = z_0 + su_3 + tv_3 \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}$$

Perpendicularidade e paralelismo reta-plano

- Reta estritamente paralela ao plano.



- Reta contida num plano.



- plano-plano:

planos paralelos
 $\vec{n}_\alpha = k\vec{n}_\beta$

planos perpendiculares
 $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0$

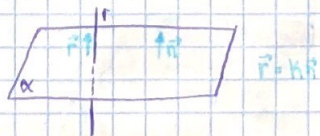
Se $\vec{n}_\alpha = \vec{n}_\beta$ e $d_\alpha \neq d_\beta \Rightarrow \alpha$ e β são coincidentes

Se $d_\alpha \neq d_\beta \Rightarrow \alpha$ e β são estritamente paralelos

$\vec{n}_\alpha \parallel \vec{n}_\beta \Rightarrow \alpha \parallel \beta$

$\vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$

- Reta perpendicular a um plano.



10

NOTA:

Infinitamente grande

$u_n = \infty$

$+\infty \rightarrow$ inf. grande pos.

$-\infty \rightarrow$ inf. grande neg.

Infinitesimo

$u_n = 0$

SUCESSOES

reais $\rightarrow$ função de domínio $\mathbb{N}$ e do conjunto de chegada $\mathbb{R}$

termo geral: $u \rightarrow$ imagem de $u(m)$ e $m \in \mathbb{N}$

exemplo: 2, 4, 6, 8, ...

$u_m = 2m$

$u_1 = 2$

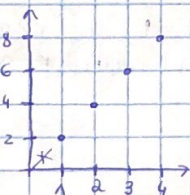
$u_2 = 4$

$u_3 = 6$

(...)

termo geral
termo da ordem n

representação gráfica:



$f(x) = u(m) \rightarrow u_m$

termo da sucessão

imagem pela função

ordem do termo
objeto da função

Sucessões monotônicas

crescente

sentido estrito

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$

sentido lato

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$

decrescente

sentido estrito

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$

sentido lato

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$

constante

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$

$\ominus \quad u_{n+1} - u_n < 0$

$\oplus \quad u_{n+1} - u_n > 0$

$0 \quad u_{n+1} - u_n = 0$

Para estudar a monotonia:

calcular $u_{n+1} - u_n$

decrescente

crescente

constante

Justificação:

Sucessões limitadas

simultaneamente majorada e minorada

$\forall n \in \mathbb{N}, a \leq u_n \leq b$

$u_n = \frac{2n+1}{n+2}$

$u_n < 2$

$0 < \frac{1}{n} \leq 1$

$3 + 0 < 3 + \frac{1}{n} \leq 3 + 1$

$3 < 3 + \frac{1}{n} \leq 4$

Sucessões crescentes: minorada
minorante: u_1

Sucessões decrescentes: majorada
majorante: u_1

conjunto

majorados

$\forall a \in A, a \leq M$

majorante

minorados

$\forall a \in A, a \geq m$

minorante

Sucessão definida por recorrência:

$f: A \rightarrow A \quad a \in A$

$u_n = \begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$

o termo seguinte depende do anterior

Princípio da INDUÇÃO matemática

condição $p(n)$ e $\forall n \in \mathbb{N}$

$\forall, x: p(1)$ é verdadeira

sempre que $p(n)$ for verdadeira para um certo $m \in \mathbb{N}$, então também $p(n+1)$ é verdadeira.

exemplo:

condição $\rightarrow p(n) \rightarrow u_n = \frac{1}{1-2n}$

$u_n \Leftrightarrow V$

$u_1 = \frac{1}{1-2 \times 1} = -1 \Leftrightarrow -1 = -1 \Leftrightarrow V$

hereditabilidade

Hipótese de Indução: $u_m = \frac{1}{1-2m}$

Tese: $u_{m+1} = \frac{1}{1-2(m+1)}$

Conclusão

Como $p(n)$ é verdadeira para $m=1$ e é hereditária, então $\forall n \in \mathbb{N}, p(n)$ é verdadeira.

C.A. $u_{n+1} = \frac{1}{1-2(n+1)} = \frac{1}{1-2n-2}$

Demonstração: $u_{n+1} = \frac{u_n}{1-2u_n} = \frac{\frac{1}{1-2n}}{1-2(\frac{1}{1-2n})} = \frac{1}{1-2n-2} = \frac{1}{-1-2n}$ [t.b.x] c.q.m.

(hipótese de indução)

PROGRESSÕES aritméticas

$$(1) (u_n) = \begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n + R, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(11)

u_n é uma p.a., se, e só se:
 $u_{n+1} = u_n + R \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = R$

(2) termo geral: $u_n = u_1 + (n-1)R$
 ou $u_n = u_j + (n-j)R$

$$\sum_{i=1}^N u_i = (u_1 + u_N) \times \frac{N-1}{2}$$

Monotomia:

- $\rightarrow r > 0 \rightarrow (u_n)$ é estritamente crescente
- $\rightarrow r < 0 \rightarrow (u_n)$ é estritamente decrescente
- $\rightarrow r = 0 \rightarrow (u_n)$ é constante
- $\rightarrow \nrightarrow$ não é monotona

$$S = \sum_{i=1}^N u_i = (u_1 + u_N) \times \frac{N}{2} = \frac{u_1 + u_N}{2} \times N$$

exemplo (1):

$$x-1, x^2, x+5 \Rightarrow p.a.$$

$$\begin{cases} R = (x+5) - x^2 \\ R = x^2 - (x-1) \end{cases} \Rightarrow (x+5) - x^2 = x^2 - (x-1) \Leftrightarrow (\dots) \Leftrightarrow x=2 \vee x=-1$$

exemplo (2):

$$\begin{cases} a_1 = -4 & a_9 = 20 \Leftrightarrow a_1 + (9-1)R = 20 \Leftrightarrow \\ a_9 = 20 & \Leftrightarrow -4 + 8R = 20 \Leftrightarrow R = 3 \end{cases}$$

$$(1, 4, 7) \quad (-2, 1, 4)$$

PROGRESSÕES geométricas

$$(1) (u_n) = \begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n \times R, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

u_n é uma p.g., se, e só se:
 $u_{n+1} = u_n \times R \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = R$

(2) termo geral: $u_n = u_1 \times R^{n-1}$
 ou $u_n = u_j \times R^{n-j}$

Monotomia:

- $\rightarrow r > 1 \rightarrow \begin{cases} u_1 > 0 \rightarrow (u_n) \text{ é crescente} \\ u_1 < 0 \rightarrow (u_n) \text{ é decrescente} \end{cases}$
- $\rightarrow 0 < r < 1 \rightarrow \begin{cases} u_1 > 0 \rightarrow (u_n) \text{ é decrescente} \\ u_1 < 0 \rightarrow (u_n) \text{ é crescente} \end{cases}$
- $\rightarrow r = 1 \rightarrow (u_n)$ é constante
- $\rightarrow r < 0 \rightarrow (u_n)$ não é monotona

$$S = \sum_{i=1}^N u_i = u_1 \frac{1-R^N}{1-R}$$

$$r = 2 \rightarrow u_1 \frac{1-2^N}{1-2}$$

exemplo (2):

$$\begin{cases} a_1 = -4 & a_9 = 20 \Leftrightarrow a_1 \times R^{9-1} = 20 \Leftrightarrow \\ a_9 = 20 & \Leftrightarrow R^8 = \frac{20}{-4} \end{cases}$$

Soma dos 20 termos consecutivos a partir do 5º termo, inclusive:

$$\begin{aligned} \rightarrow u_5 &= 12 \\ \rightarrow u_3 - u_2 &= 3 = R \\ \rightarrow u_n &\text{ é p.a.} \end{aligned}$$

$$\sum_{i=5}^{24} u_i = (u_5 + u_{24}) \times \frac{24-5+1}{2} = 69 \times \frac{20}{2} = 810$$

$$u_{24} = u_5 + (24-5) \times 3 = 69$$

POTÊNCIAS

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad [b \neq 0]$$

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

$$a^0 = 1$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(a : b)^n = a^n : b^n$$

$$a^1 = a$$

[a ≠ 0]

12

LIMITES

Qual é a ordem a partir do qual $a_n \in \sqrt[0,01]{(1)}$?

$$|1 - a_n| < 0,01 \Leftrightarrow 0,99 < a_n < 1,01 \Leftrightarrow$$

$$a_n = 1 - \frac{1}{2n+2}$$

$$\Leftrightarrow \left| 1 - \left(1 - \frac{1}{2n+2} \right) \right| < 0,01 \Leftrightarrow$$

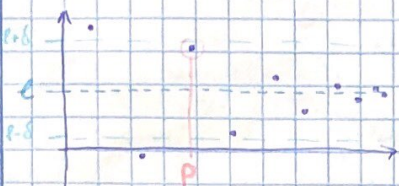
$$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{2n+2} \right| < 0,01 \Leftrightarrow 100 - 2 < 2n \Leftrightarrow n > 49$$

$2n+2 > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

vizinhança de centro em 1 e raio 0,01

de uma SUCESSÃO:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \text{ ou } u_n \rightarrow l$$



* Para qualquer $\delta > 0$, existe uma ordem ($p \in \mathbb{N}$):

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n - l| < \delta$$

$$u_n \in \sqrt[0]{l}$$

$$l - \delta < u_n < l + \delta$$

limite infinito: $\lim u_n = +\infty$

$$\hookrightarrow \forall L > 0, \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n > L$$

$$\lim u_n = -\infty$$

$$\hookrightarrow \forall L > 0, \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n < -L$$

exemplos:

1

$$\lim u_n = l$$

$$\delta > 0$$

$$\exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n - l| < \delta$$

$$l - \delta < u_n < l + \delta$$

2

$$\text{Seja } \delta > 0$$

$$a_n > L \Leftrightarrow 3n+1 > L \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{L-1}{3}$$

$$\text{Seja } S = \left] \frac{L-1}{3}, +\infty \right[\cap \mathbb{N}$$

$$\text{Seja } p = \text{mínimo de } S$$

$$\text{Então, } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow a_n > L$$

$$\text{e logo } u_n \rightarrow +\infty$$

1

$$u_n = 3 + \frac{1}{n}$$

$$\lim u_n = 3?$$

2

$$a_n = 3n+1$$

$$\lim a_n = +\infty?$$

Seja $\delta > 0$,
 $|u_n - 3| < \delta \Leftrightarrow \left| 3 + \frac{1}{n} - 3 \right| < \delta \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \left| \frac{1}{n} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{\delta} < n$
 $S = \left] \frac{1}{\delta}, +\infty \right[\cap \mathbb{N}$
Seja $p = \text{mínimo de } S$
Então, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n - 3| < \delta$
e logo, $\lim u_n = 3$

NOTA:

$$|x| < a \Leftrightarrow x < a \wedge x > -a$$

$$|x| > a \Leftrightarrow x > a \vee x < -a$$

convergentes: limite é um número real

SUCESSÕES

divergentes: limite não é um número real

Teorema da unicidade do limite de uma sucessão:

sucessão convergente

se tem um limite $\rightarrow \lim u_n$
é limitada

decrecente
minorada

crecente
majorada

Teorema: 2 sucessões (u_n) e (v_n)

se (u_n) é limitada e $\lim v_n = 0$, então $\lim (u_n \times v_n) = 0$.

LIMITES DE SUCESSÕES

$c \neq 0$

1

$$u_n = \frac{a_n + b}{c_n + d}$$

se

$$c \neq 0 : \lim = \frac{a}{c}$$

$$\left[\lim \frac{2n+3}{5n-4} = \frac{2}{5} / \lim \frac{3}{5n-4} = \frac{0}{\infty} = 0 \right]$$

$$a = c = 0 :$$

$$\lim = \frac{b}{d}$$

$$c = 0 : \lim = +\infty$$

$$- \frac{a}{d} > 0$$

$$\left[\lim \frac{-5n+3}{-2} = \lim \left(\frac{5n}{-2} - \frac{3}{-2} \right) = +\infty \right]$$

$$\lim = -\infty$$

$$- \frac{a}{d} < 0$$

$$\left[\lim \frac{5n+3}{-2} = \lim \left(\frac{5n}{-2} + \frac{3}{-2} \right) = -\infty \right]$$

$r \in \mathbb{Q}$

2

$$u_n = n^r$$

$$r > 0 : \lim = +\infty$$

$$\left[\lim n^3 = +\infty \right]$$

$$r < 0 : \lim = 0$$

$$\left[\lim n^{-3} = \lim \left(\frac{1}{n^3} \right) = 0 \right]$$

$$r = 0 : \lim = 1$$

$$\left[\lim n^0 = 1 \right]$$

3

$$\lim (u_n \pm v_n) = \lim u_n \pm \lim v_n$$

$$\lim (u_n \times v_n) = \lim u_n \times \lim v_n$$

$$\lim (a \times v_n) = a \times \lim v_n$$

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}$$

$$\lim (u_n)^r = (\lim u_n)^r$$

$r \in \mathbb{N}$
se
 $r > 0 \wedge u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$
ou
 $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$a \in \mathbb{R}$

$v_n \neq 0,$
 $\lim v_n \neq 0,$
 $\forall n \in \mathbb{N}$
 $r \neq 0$

Algebra de limites infinitos

	Convenções	Indeterminações
SOMA	$a \pm \infty = \pm \infty$ $+\infty + \infty = +\infty$ $-\infty - \infty = -\infty$	$\infty - \infty$
PRODUTO	$a \times (\pm \infty) = \pm \infty$ se $a > 0$ ($a \in \mathbb{R}^+$) $a \times (+\infty) = -\infty$ se $a < 0$ ($a \in \mathbb{R}^-$) $a \times (-\infty) = +\infty$ $+\infty \times (+\infty) = +\infty$ $+\infty \times (-\infty) = -\infty$ $-\infty \times (-\infty) = +\infty$	$0 \times \infty$ (patologia)
QUOCIENTE	$\frac{a}{0^+} = +\infty$ e $\frac{a}{0^-} = -\infty$ se $a > 0$ ($a \in \mathbb{R}^+$) $\frac{a}{0^+} = -\infty$ e $\frac{a}{0^-} = +\infty$ se $a < 0$ ($a \in \mathbb{R}^-$) $\frac{a}{\infty} = 0$ e $\frac{\infty}{k} = \infty$	$\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$
POTÊNCIAS	$(+\infty)^r = +\infty$ ($r \in \mathbb{Q}^+$) $(-\infty)^r = +\infty$ ($r \in \mathbb{N}$ e r é par) $(-\infty)^r = -\infty$ ($r \in \mathbb{N}$ e r é ímpar)	a^n ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$) $\lim a^n = +\infty$ se $a > 1$ ($a^n = +\infty$) $\lim a^n = 0$ se $0 < a < 1$ ($(\frac{1}{a})^n = \infty$)
RAÍZES	$\sqrt[r]{+\infty} = +\infty$ ($r \in \mathbb{N}$) $\sqrt[r]{-\infty} = -\infty$ ($r \in \mathbb{N}$ e r é ímpar) $[(+\infty)^{5/2} \times (-\infty)^{5/2}] = (+\infty) \times (-\infty) = -\infty$	$\sqrt[r]{a}$ ($a \in \mathbb{R}^+$) $\lim \sqrt[r]{a} = 1$ $\lim a^{1/n} = 1$

INDETERMINAÇÕES

 $\infty - \infty$

sucessão polinomial:

usa-se o termo
de maior grau

$$\begin{aligned} \lim (-2n^3 + n) &= -\infty + \infty \\ &= \lim (-2n^3) = -\infty \\ \lim (2n^3 + n) &= +\infty - \infty \\ &= \lim (2n^3) = +\infty \end{aligned}$$

sucessão irracional:

multiplicar e dividir
pela expressão conjugada

$$\begin{aligned} \lim (\sqrt{n+5} - \sqrt{n}) &= \infty - \infty \\ &= \lim \left[(\sqrt{n+5} - \sqrt{n}) \times \frac{\sqrt{n+5} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n}} \right] = \\ &= \lim \frac{(\sqrt{n+5})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n}} = \lim \frac{n+5-n}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n}} = \lim \frac{5}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n}} = \frac{5}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

progressões geométricas:

pôr em evidência a
progressão geométrica de
maior razão

$$\begin{aligned} \lim (2^n - 5^n) &= \infty - \infty \\ &= \lim \left[5^n \left(\frac{2^n}{5^n} - 1 \right) \right] = \lim \left[5^n \left(\left(\frac{2}{5} \right)^n - 1 \right) \right] = \\ &= +\infty (0 - 1) = -\infty \end{aligned}$$

 $\frac{\infty}{\infty}$

sucessão polinomial:

usar o termo de maior
grau do numerador e
denominador

$$\begin{aligned} \lim \frac{2n^2 - 5n + 2}{3 - n^2} &= \frac{\infty}{\infty} \\ &= \lim \frac{2n^2}{-n^2} = \frac{2}{-1} = -2 \end{aligned}$$

progressões geométricas:

pôr em evidência a pg.
de maior grau no
numerador e denominador
(não importa o que está em cima (n))

$$\begin{aligned} \lim \frac{3^n + 6^n}{6^{n-2} + 2} &= \frac{\infty}{\infty} \\ &= \lim \frac{6^n \left(\left(\frac{3}{6} \right)^n + 1 \right)}{6^n \left(6^{-2} + \frac{2}{6^n} \right)} = \frac{0 + 1}{\frac{1}{36} + 0} = 36 \end{aligned}$$

sucessões irracionais:

pôr n^2 em evidência
dentro da raiz e
simplificar

$$\begin{aligned} \lim \frac{\sqrt{n^2 + 3n}}{3n + 1} &= \frac{\infty}{\infty} \quad \left[\frac{3n^2 - 3n}{n} \right] \\ &= \lim \frac{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{3}{n} \right)}}{3n + 1} = \lim \frac{\sqrt{n^2} \times \sqrt{1 + \frac{3}{n}}}{3n + 1} = \lim \frac{n \times \sqrt{1 + \frac{3}{n}}}{n \left(3 + \frac{1}{n} \right)} \quad \rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \\ &= \lim \frac{\sqrt{1 + 0}}{3 + 0} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \lim \frac{\sqrt{n+2}}{3\sqrt{n}} &= \frac{\infty}{\infty} \\ &= \lim \left(\frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{n+2}{n}} \right) = \lim \left(\frac{1}{3} \times \sqrt{1 + \frac{2}{n}} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \times \sqrt{1 + 0} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

 $\frac{0}{0}$ e $0 \times \infty$

(falsas indeterminações)

$$\begin{aligned} \lim \frac{\frac{3}{n+5}}{\frac{-2}{n^2}} &= \frac{0}{0} \\ &= \lim \frac{3n^2}{-2n-10} \quad (\dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim \left(\frac{2}{\sqrt{n^2+3}} \times n^3 \right) &= 0 \times \infty \\ &= \lim \frac{2n^3}{\sqrt{n^2+3}} \quad (\dots) \end{aligned}$$

* $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n^2} = 0$, pois $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$,

pelo que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \cdot \cos(n) \right) = 0$.

(teorema da página seguinte)

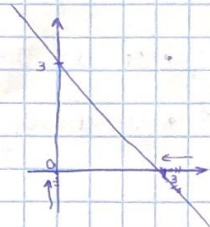
LIMITE das funções R.V.R.

- $f(x) = -x + 3 \rightarrow D_f = \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 3) = -\infty + 3 = -\infty$

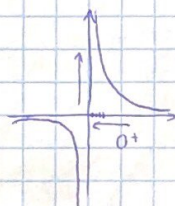
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + 3) = -(-\infty) + 3 = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (-x + 3) = -3 + 3 = 0$



- $g(x) = \frac{1}{x} \rightarrow D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$



• PONTO ADERENTE a um conjunto

$\hookrightarrow A \subset \mathbb{R}$

* ponto aderente a A: $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

- exemplo:

$A = [-1, 3] \cup \{5\}$

Quais são os pontos aderentes a A?

$[-1, 3] \cup \{5\}$

• 3 é aderente a A? $\checkmark$

$\{x_n = 3 - \frac{1}{n} \in A, \forall n \in \mathbb{N}\}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$



• -1 é aderente a A? $\checkmark$

• 0 é aderente a A? $\checkmark$

$\{x_n = -1 \in A, \forall n \in \mathbb{N}\}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$

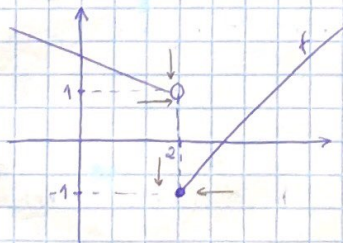
$\{x_n = 0 \in A, \forall n \in \mathbb{N}\}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

• DEFINIÇÃO de LIMITE de uma função (segundo Heine)

* $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall (x_n) \in D_f, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$

- exemplo função que não tem limite para um determinado "a".



$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

① $x_n = 2 + \frac{1}{n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2^+$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = (-1)$

② $x_n = 2 - \frac{1}{n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2^-$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = (1)$

Logo, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ não existe.

16

Limite lateral

- limite de f à esquerda de " a " (ou por valores inferiores a " a ")

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

- limite de f à direita de " a " (ou por valores superiores a " a ")

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

$$\begin{cases} \bullet \text{ se } a \notin D_f & \text{e } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \longrightarrow = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \\ \bullet \text{ se } a \in D_f & \text{e } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \longrightarrow = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \\ \bullet \text{ se } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \longrightarrow \text{ não existe } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \end{cases}$$

- exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x=1 \\ \sqrt{3x+1} + 1 & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} (3) = 3 \\ \bullet f(1) &= 3 \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt{3x+1} + 1) = 3$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$ e não existe $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, então $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$.

Álgebra de limites de uma função

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow a} (Kf)(x) = K \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^r = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^r \quad \xrightarrow{\text{exemplos}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2+3} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2+3)} = \sqrt{0+3} = \sqrt{3}$$

Teorema:

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

$\rightarrow g$ é limitada

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = 0$$

- exemplo: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x}$

1- não existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$, porque:

2- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$, pois:

$\bullet \quad x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad (x_n) \rightarrow +\infty$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(x_n) = 1$

$\bullet \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1$ ($\sin(x)$ é limitada)

$\bullet \quad x_n = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad (x_n) \rightarrow +\infty$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(x_n) = -1$

$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Assim, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} \cdot \sin(x) \right] = 0$.

Limite da função composta

↳ a^o é aderente a D feg:

* se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$, então $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$

→ exemplo na página seguinte.

INDETERMINAÇÕES antes de as indicar, substituir para ter a certeza que há indeterminação!!!

$\infty - \infty$

funções polinomiais: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 3x^2 + 5) = \infty - \infty$
 usa-se o termo de maior grau
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3) = 2x(+\infty) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) = +\infty$

funções radicais: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x+2}) = \infty - \infty$
 multiplicar e dividir pelo conjugado:
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x+2})(\sqrt{x} + \sqrt{x+2})}{\sqrt{x} + \sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - (x+2)}{\sqrt{x} + \sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x} + \sqrt{x+2}} = \frac{-2}{+\infty} = 0$

funções racionais: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{1-x^2} \right) = \frac{1}{0^+} + \frac{1}{0^-} = \infty - \infty$
 transformar numa única fração (mesmo denominador)
 $= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(1-x)(1+x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x+x-1}{x(-1)(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2}{-x(1+x)} = \frac{-2}{-1(1+1)} = \frac{-2}{-2} = 1$



$\frac{\infty}{\infty}$

caso simples:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty}$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1-\frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{2}} = +\infty$

funções racionais: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 + x^2 + 2}{2x^2 - 3x + 1} = \frac{\infty}{\infty}$
 usar os termos de maior grau
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3}{2} = \frac{3}{2} \times (-\infty)^3 = -\infty$

funções com radicais: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x} - 3x}{1-2x} = \frac{\infty}{-\infty}$
 pôr x^2 em evidência dentro da raiz
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})} - 3x}{1-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{1+\frac{1}{x}} - 3x}{1-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1+\frac{1}{x}} - 3x}{1-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 3)}{1-2x} = \frac{1 \cdot 0}{-2} = 0$
 * atenção ao $(x)!$ *
 porque $x \rightarrow +\infty$
 $|x| = x$

NOTAS

importante

$\sqrt{x^2} = |x|$
 $\rightarrow \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$
 $\rightarrow \sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$

$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Regra de Ruffini:

resto tem de ser zero (0)!!

funções racionais: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{0}{0}$
 fatorizar o numerador e o denominador
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2x^2 + 2x^2 + 8x - 8}{x^2 + x - 6} = \frac{0}{0}$
 numerador: $\begin{array}{r|rrrr} & -2 & 2 & 8 & -8 \\ & \downarrow & & & \\ 2 & -2 & -2 & 4 & 0=R \end{array}$
 $\rightarrow (x-2)(-2x^2-2x+4)$
 denominador: $\begin{array}{r|rr} & 1 & 1 & -6 \\ & \downarrow & & \\ 2 & 1 & 3 & 0=R \end{array}$
 $\rightarrow (x-2)(x+3)$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)(-2x^2-2x+4)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2x^2-2x+4}{x+3} = \frac{-2 \times 3^2 - 2 \times 3 + 4}{3+3} = \frac{-18-6+4}{6} = \frac{-20}{6} = -\frac{10}{3}$

Nota:

$0 \times 0 = 0^+$ mic.

0 (const.)

funções com radicais: $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{\sqrt{x^2 + 11} - 6} = \frac{0}{0}$

multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado da expressão com raiz

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x^2 - 25)(\sqrt{x^2 + 11} + 6)}{x^2 + 11 - 6^2} = \frac{\sqrt{5^2 + 11} + 6}{6 + 6} = 12$$

$0 \times \infty$ (falsa indeterminação)

$$\lim_{x \rightarrow 7} \left[\frac{1}{x^2 - 8x + 7} \times \sqrt{2x - 14} \right] = 0 \times \infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2x - 14}}{x^2 - 8x + 7} = \frac{0}{0} \quad (\dots)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{2}{x} \times (x^3 + 3x) \right] = +\infty \times 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^3 + 6x}{x} = 6$$

exemplo de limite de uma função composta:

$$- f(x) = x^2 + 5$$

$$- g(x) = \frac{2}{x - 9}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f \circ g)(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 5) = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} g(x) = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{2}{x - 9} = \frac{2}{0} \quad \Delta$$

2) voltar atrás:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = (2^+)^2 + 5 = 9^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 9^+} g(x) = \frac{2}{9^+ - 9} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = (2^-)^2 + 5 = 9^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 9^-} g(x) = \frac{2}{9^- - 9} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

Como $\lim_{x \rightarrow 2^+} (f \circ g)(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} (f \circ g)(x)$, então não existe $\lim_{x \rightarrow 2} (f \circ g)(x)$.

* interessante exercício!!

de p.a. e lim. (soma / produtos)
de n de quantidade

FUNÇÕES CONTÍNUAS

$a \in D_f$

$\rightarrow f$ é contínua em a quando $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

* Quando operamos com funções contínuas, obtemos funções contínuas.

ex.: $f(x) = x^2$ $g(x) = \sqrt{x}$

$(f+g)(x)$ é contínua em $D_f \cap D_g$

* As funções polinomiais, racionais e trigonométricas.

$$f(x) = x^5 - 2x^5 - 3x - 2$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 1}$$

$$\cos(x) / \sin(x) + \tan(x)$$

* $f(x) = x^r$ é uma função contínua (irracional)
 $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$ (número racional $\rightarrow r$)

* exercício no caderno

ASSINTOTAS

19

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

verticais
($x=a$)

não verticais
($y=mx+b$)

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$$

horizontais
($m=0$ e $b \in \mathbb{R}$)

obliquas
($m \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b \text{ (ou } c) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b/c$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) \in \mathbb{R}$$

Assintotas verticais

→ a reta de equação $x=a$ é assintota vertical ao gráfico de f quando pelo menos um dos limites laterais de f no ponto a for infinito

NOTA: Se os dois limites laterais forem infinitos, a assintota designa-se por bilateral.

PONTOS CANDIDATOS:

- pontos aderentes que não pertencem a D_f (fronteiras)
- pontos na mudança de ramos / de descontinuidade

exemplo:

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$$

• Como f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, apenas $x=-3$ e $x=3$ podem ser a.v. ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{-6}{0^-} = +\infty$$

• logo, $x=-3$ é a.v.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{0}{0^+} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{6}$$

• logo, $x=3$ não é a.v.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{0}{0^-} = \frac{1}{6}$$

CURIOSIDADE:

- funções polinómicas
- se grau numerador $\leq$ grau denominador
↓
A.H.
- se grau numerador $>$ grau denominador
↓
A.O.

Assintotas horizontais → $m=0$ e $b \in \mathbb{R}$

→ a reta de equação $y=b$ ($b \in \mathbb{R}$) é assintota horizontal ao gráfico de f quando $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$.

exemplo:

$$f(x) = \frac{2x}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x-1} \stackrel{=}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x-1} \stackrel{=}{=} 2$$

• logo, $y=2$ é a.h. ao gráfico de f .

$m \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}$

Assintotas obliquas / não verticais

→ a reta de equação $y=mx+b$ ($m, b \in \mathbb{R}$) é assintota ao gráfico de f quando $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (mx+b)) = 0$

$$y = mx + b$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) \in \mathbb{R}$$

* fazer sempre a.n.v. para $+\infty$ e $-\infty$!!

(se $D_f = \mathbb{R}^+$ (ex.), fazer só para $+\infty$.
se $D_f = \mathbb{R}$, fazer $\pm\infty$.)

(20)

FUNÇÕES RACIONAIS

→ quociente de dois polinômios.

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : B(x) \neq 0\}$$

* ver exemplo 2, p. 132

Zeros: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{A(x)}{B(x)} = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \wedge B(x) \neq 0$

exemplo:

$$\frac{3x+1}{x+2} = 2 \Leftrightarrow 3x+1 = 2(x+2) \wedge x+2 \neq 0 \Leftrightarrow 3x+1 = 2x+4 \wedge x \neq -2 \Leftrightarrow x = 3 //$$

Estudo do sinal:

$$f(x) = \frac{3x^2 + x - 2}{1-x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2}{1-x} \leq x+2$$

Inequações:

1º → chegar até esta expressão:

$$\frac{A(x)}{B(x)} < 0$$

2º/1º - zeros do numerador e zeros do denominador:

$$3x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (\dots) \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{2}{3}$$

$$1-x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$



3º/2º - tabela de sinal:

x	$-\infty$	-1	$\frac{2}{3}$	1	$+\infty$
$3x^2 + x - 2 = 0$	+	0	-	+	+
$1-x$	+	+	+	0	-
$f(x)$	+	0	-	0	+

→ não definido (n.d.)
sem significado (s/s)

4º/3º - concluir e determinar C.S.

• f é positiva quando $x \in]-\infty, -1[\cup]\frac{2}{3}, 1[$ e negativa quando $x \in]-1, \frac{2}{3}[\cup]1, +\infty[$

$$C.S. = [-1, \frac{2}{3}] \cup]1, +\infty[$$

FUNÇÕES HOMOGRAFICAS

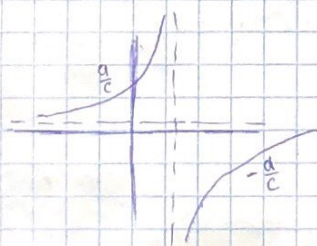
$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

O gráfico de f tem como assintotas:

$$AH: y = \frac{a}{c}$$

$$AV: x = -\frac{d}{c}$$

$$(cx+d=0)$$



Divisão de polinômios:

$$\begin{array}{r} 5x-2 \\ -5x-\frac{5}{2} \\ \hline \frac{9}{2} \end{array}$$

$$D = d \times q + R \Leftrightarrow \frac{D}{d} = q + \frac{R}{d}$$

$$\frac{5}{2} + \frac{-\frac{9}{2}}{2x+1}$$

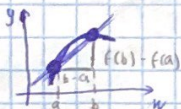
DERIVADAS

29

Taxa média de variação:

$$t.m.v. = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Interpretação: Física → velocidade média no intervalo $[a, b]$
GEOMÉTRICA → declive da reta secante ao gráfico de f em $x=a$ e $x=b$



Derivada de uma função num ponto

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}, \text{ quando existe e é finito}$$

$(x_0+h-x_0) \rightarrow h$

f é derivável em x_0 $\iff$ f é diferenciável em x_0 $\iff$ $f \in D_f$

limites laterais iguais derivadas laterais iguais

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Interpretação: Física → velocidade instantânea ($\frac{dv}{dt}$ em x_0)
GEOMÉTRICA → declive da reta tangente ao gráfico em x_0

exemplo:

ex. reta tangente
↓
 $f(x) = x^2 + 1$
no ponto 2

$$m = f'(2)$$

$$f'(x) = (x^2 + 1)' = (x^2)' + (1)' = 2x + 0 = 2x$$

$$f'(2) = 2 \times 2 = 4$$

$$f(2) = 2^2 + 1 = 5$$

$P_1(2, 5)$

$$y = 4x - 3$$

$$y = 4x + b$$

$P_2(2, 5)$
 $5 = 4 \times 2 + b \implies b = -3$

FUNÇÃO Derivada

se f é diferenciável em a , então f é contínua em a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 0 \implies \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$$

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$$

$$(f \times g)'(a) = f'(a) \times g(a) + f(a) \times g'(a)$$

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$$

$$\left(\frac{f(a)}{g(a)} \right)' = \frac{f'(a) \times g(a) - f(a) \times g'(a)}{[g(a)]^2}$$

REGRAS DE DERIVAÇÃO:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v' \implies (k \times u)' = k \times u'$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2} \implies \left(\frac{k}{v} \right)' = - \frac{k \times v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \times u^{n-1} \times u' \implies (m \times u^n)' = m \times n \times u^{n-1} \times u'$$

$$\times (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \implies (\sqrt[3]{u})' = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$$

$$\times (f \circ g)(x) = g'(x) \times f'(g(x))$$

$$(k)' = 0$$

$$(kx)' = k$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

$$\begin{aligned} (ax)' &= a \\ (ax^2)' &= 2ax \\ (ax^3)' &= 3ax^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(f \circ g)(a) = g'(a) \times f'(g(a))$$

$$(u^n)' = n \times u^{n-1} \times u'$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \times u'$$

$$(\sqrt[3]{u})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}} \times u'$$

(22)

Teorema de Lagrange:

$$c \in]a, b[$$

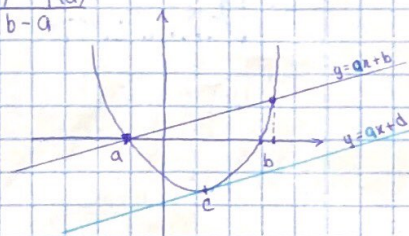
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

MONOTONIA:

$$f(b) > f(a) \quad b - a > 0$$

- $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ é estritamente crescente*
- $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ é estritamente decrescente*
- $f'(x) = 0 \Rightarrow f$ é constante*

* em $]a, b[$



$$\{f' \text{ sinal} \leftrightarrow f \text{ monotonia extremos}\}$$

Exemplos de aplicação: $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$1^\circ) f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x(x^3)' - 2x + 0 = x^2 - 2x$$

$$2^\circ) f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

3º) TABELA DE SINAL:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	+
f		máx.	mín.	
		$f(0)$	$f(2)$	

1º) Derivada

2º) Zeros

3º) Tabela de sinal

4º) Conclusão

4º) f é crescente em $]-\infty; 0]$ e $[2; +\infty[$
f é decrescente em $[0; 2]$

extremos: máximo relativo $\rightarrow f(0) = 2$

mínimo relativo $\rightarrow f(2) = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$

$$g(x) = \sqrt{x} - x \quad D_g = \mathbb{R}_0^+$$

$$1^\circ) g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 = \frac{1 - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$2^\circ) g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{x} = 0 \wedge 2\sqrt{x} \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \wedge \sqrt{x} \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \wedge x \neq 0$$

x	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$1 - 2\sqrt{x}$	+	0	-
$2\sqrt{x}$	0	+	+
$g'(x)$	n.d.	+	-
g	mín.	máx.	

4º) g é crescente em $[0; \frac{1}{4}]$

g é decrescente em $[\frac{1}{4}; +\infty[$

extremos: máximo absoluto e relativo $\rightarrow h(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$
mínimo relativo $\rightarrow h(0) = 0$
e absoluto??

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - x^2}{\sqrt{x} + x} = -\infty$$

logo, não é mínimo absoluto.

$$h(x) = x + 2 + \frac{1}{x-1}$$

em $]5; 10[$

$$D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$1^\circ) h'(x) = 1 + \left(\frac{1}{x-1}\right)' = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2}$$

$$2^\circ) h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \wedge (x-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 0 \wedge x \neq 1$$

$$\text{c.A.: } \left(\frac{1}{x-1}\right)' = -\frac{1}{(x-1)^2} \cdot 1$$

x	-5	0	1	2	10
$(x-1)^2 - 1$	+	0	-	0	+
$(x-1)^2$	+	+	0	+	+
$h'(x)$	+	0	-	0	+
h		máx.	nd.	mín.	

4º) h é crescente em $]5; 0]$ e $[2; 10[$

h é decrescente em $[0; 1]$ e $[1; 2]$

extremos:

- máx. relativo $\rightarrow h(0) = 1$
- máx. abs. $\rightarrow$ não existem
- mín. relativo $\rightarrow h(2) = 5$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x + 2 + \frac{1}{x-1}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(x + 2 + \frac{1}{x-1}\right) = -\infty$$

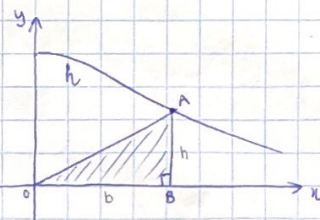
$$D_h = \mathbb{R}^+$$

$$h(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$$

• triângulo $[ABO]$ é retângulo

a) área do triângulo em função da abscissa x do ponto A ?

b) para que valor da abscissa do ponto A a área do Δ é máx?



$$a) A_{[ABO]} = \frac{b \times h}{2} = \frac{f(x_A) \times x_A}{2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x_A^2 + 3} \times x_A}{2} = \frac{x_A}{2x_A^2 + 6}$$

$$\text{logo, } A(x) = \frac{x}{2x^2 + 6}$$

$$b) A'(x) = \frac{(x)' \times (2x^2 + 6) - x(2x^2 + 6)'}{(2x^2 + 6)^2} = \frac{2x^2 + 6 - 4x^2}{(2x^2 + 6)^2} = \frac{-2x^2 + 6}{(2x^2 + 6)^2}$$

$$\begin{array}{l} \text{C.A.} \\ (x)' = 1 \\ (2x^2 + 6)' = 4x \end{array}$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2 + 6}{(2x^2 + 6)^2} = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 6 = 0 \wedge (2x^2 + 6)^2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

sempre verdade:

$$\Leftrightarrow -2x^2 = -6 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$$

$$(D_h = \mathbb{R}^+) \nearrow$$

U

x	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$-2x^2 + 6$	+	0	-
$(2x^2 + 6)^2$	+	+	+
$A'(x)$	+	0	-
$A(x)$		$\nearrow$ máx $\searrow$	

logo, a área do triângulo é máxima para $x = \sqrt{3}$.

$$(\text{Área máxima: } h(\sqrt{3}) = \frac{1}{(\sqrt{3})^2 + 3} = \frac{1}{6})$$