

matemática

GEOMETRIA ANALÍTICA

raízes

$$a^n = \sqrt[n]{a} \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \frac{1}{a^{\frac{n}{m}}}$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[n]{a})^m \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

RACIONALIZAR

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2}$$

Inclinação de uma reta:

$$m_r = \tan(\alpha)$$


Equação vetorial:

$$(x, y) = (x_A, y_A) + k(x_B - x_A, y_B - y_A)$$

Retas perpendiculares:

$$r \perp s \rightarrow \vec{r} \cdot \vec{s} = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad m_r \cdot m_s = -1$$

Ângulo entre 2 retas:

$$0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$$

Como definir e.c. do plano?

1) 3 pontos

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{BC} = 0 \end{cases}$$

2) 1 ponto e uma reta (vetorial)

3) 2 retas não paralelas (eq. vet.)

4) 2 retas paralelas (eq. vet.)

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Mediatriz:

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2$$

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

Eq. da circunferência/círculo:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$$

No espaço, apenas acrescentar as cotas.
Ex.: $+(z_A - z_B)^2$

VECTORES

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2}$$

$$\vec{AB} = B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

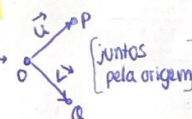
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u} \wedge \vec{v})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 : \text{ângulo obtuso}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 : \text{ângulo agudo}$$

$\vec{u} = k\vec{v}$: Vetores colineares
(paralelos ou com a mesma direção)



LUGARES GEOMÉTRICOS

PLANO

Mediatriz do segmento de reta [AB]

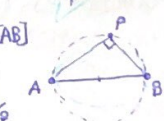
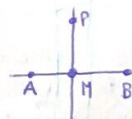
$$\vec{AB} \cdot \vec{MP} = 0$$

Equação da circunferência de diâmetro [AB]

$$\vec{PA} \cdot \vec{PB} = 0$$

Reta tangente ao ponto B de uma circunferência de centro A

$$\vec{PB} \cdot \vec{AB} = 0$$



ESPAÇO

Equação cartesiana do plano:

$$\alpha: ax + by + cz + d = 0$$

$$\vec{n} \propto (a, b, c)$$

Equação vetorial do plano:

$$\alpha: (x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + k\vec{u} + l\vec{v}, \quad k, l \in \mathbb{R}$$

$\vec{u}$ e $\vec{v}$: não colineares

A: ponto no espaço

RETA-PLANO

→ Reta estritamente paralela ao plano

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = 0$$

- ponto da r ∉ plano

→ Reta contida no plano

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = 0$$

- ponto da r ∈ plano

→ Reta perpendicular ao plano

$$\vec{r} = k\vec{n}$$

PLANO-PLANO

→ Planos paralelos

$$\vec{n}_x = k\vec{n}_y$$

→ Planos perpendiculares

$$\vec{n}_x \cdot \vec{n}_y = 0$$

SUCESSÕES

Sucessão monótona:

- crescente: $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n \rightarrow$ minorada

- decrescente: $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n \rightarrow$ majorada

- constante: $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$

Para estudar a monotonia: calcular $u_{n+1} - u_n$

Sucessão limitada:
minorada & majorada

$$D = \mathbb{N} \hookrightarrow C.C. = \mathbb{R}$$

Sucessão

divergente
limite não é um número real

convergente
limite é um número real

- só tem um $\lim(u_n)$
- é limitada

Termo da sucessão: imagem (u_n)

Ordem do termo: objeto (n)

Infinitamente grande: $\lim u_n = \infty$

Infinitésimo: $\lim u_n = 0$

INDETERMINAÇÕES

termo de maior grau	termo de menor grau	sucessão
$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	polinomial
$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	sucessão irracional
$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	prog. geom.

potências

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

PROGRESSÃO aritmética

$$R = u_{n+1} - u_n$$

$$u_n = u_j + (n-j)R$$

$$S = \sum_{i=1}^n u_i = (u_1 + u_n) \times \frac{n}{2}$$

PROGRESSÃO geométrica

$$R = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

$$u_n = u_j \times R^{n-j}$$

$$S = \sum_{i=1}^n u_i = u_1 \times \frac{1-R^{n+1}}{1-R}$$

@WIK by Filipa

TRIGONOMETRIA

SOH
CAH
TOA



$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Ângulo inscrito:



Ângulos

complementares: $\frac{\pi}{2} - \alpha$
suplementares: $\pi - \alpha$

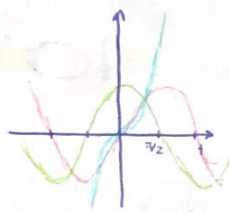
	sin	cos	tan
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$$

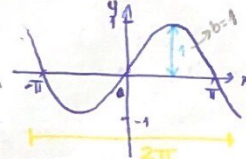
	sin	cos	tan
$\alpha + \beta$	$\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$	$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$	$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$
$\alpha - \beta$	$\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$	$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$	$\frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$
2α	$2 \sin \alpha \cos \alpha$	$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ $2 \cos^2 \alpha - 1$ $1 - 2 \sin^2 \alpha$	$\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS



L.N: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$(\sin(u))' = u' \cos(u) \quad | \quad (\cos(u))' = -u' \sin(u) \quad | \quad (\tan(u))' = u' \frac{1}{\cos^2(u)}$$



$f(x) = \sin(x)$ $\rightarrow$ 2π -periódica ímpar

$g(x) = \cos(x)$ $\rightarrow$ 2π -periódica par

$h(x) = \tan(x)$ $\rightarrow$ π -periódica ímpar

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2K\pi \vee x = (\pi - \alpha) + 2K\pi \quad K \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2K\pi \vee x = -\alpha + 2K\pi \quad K \in \mathbb{Z}$$

$$\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + K\pi \quad K \in \mathbb{Z}$$

$$f(x) = a + b \sin(cx + d)$$

Período fundamental: $\frac{2\pi}{|c|}$

$$b = \frac{\text{Máx} - \text{Mín}}{2}$$

$$d = \frac{\text{Máx} + \text{Mín}}{2}$$

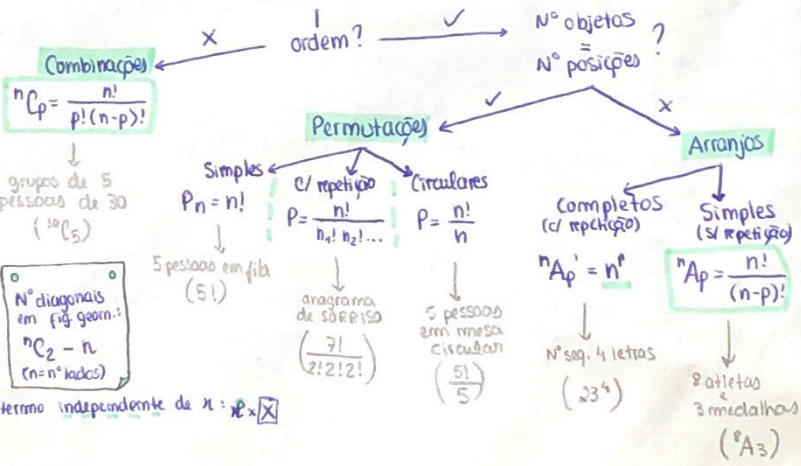
C. COMBINATÓRIO

PROBABILIDADES

$A \cap B = A \cap B$
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
 $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$
 $P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(B)$
 Laplace: $P(A) = \frac{\# \text{cf.}}{\# \text{cp.}}$

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (só quando B ocorrer)
 $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$
 acontecimentos independentes:
 $P(A|B) = P(A)$
 $[P(A \cap B) = P(A) \times P(B)]$

CÁLCULO COMBINATÓRIO



${}^nC_n = {}^nC_0 = 1$ • fórmula de Pascal: ${}^{n+1}C_p = {}^nC_p + {}^nC_{p+1}$

${}^nC_p = {}^nC_{n-p}$ • $\sum_{i=0}^n {}^nC_i = 2^n$

${}^nC_1 = {}^nC_{n-1} = n$

Binómio de NEWTON: $\sum_{k=0}^n {}^nC_k x^{n-k} y^k = (x+y)^n$
 soma dos coeficientes dos seus termos:
 $(1^3 - \frac{3}{2})^8 \rightarrow (1-3)^8 = 256$

$T_{p+1} = {}^nC_p x^{n-p} y^p$ → termo independente de x: $x \times x$

NÚMEROS COMPLEXOS

$z = a + bi$
 $\bar{z} = a - bi$
 $z + \bar{z} = 2a$
 $z - \bar{z} = 2bi$

$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$
 $\overline{zw} = \bar{z} \bar{w}$
 $|zw| = |z||w|$
 $|z|^2 = z \bar{z} = a^2 + b^2$
 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
 $\overline{AB} = |z - z_1|$

EQUAÇÕES:

1) $\frac{z+2i}{1-z} = -i+1 \Rightarrow \frac{z+2i}{1-z} + i - 1 = 0$ → multiplicar por $1-z$
 2) $z + i\bar{z} = 1 - 4i \Rightarrow z = x + yi \rightarrow$ iguais $\begin{cases} x+y=1 \\ -3x+y=-4 \end{cases}$
 3) $iz^3 + z\bar{z}^2 + i\bar{z} + 2 = 0$ e $i \in \text{solução}$ → fatorizar → F.R.
 4) $z^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 4)(z^2 + 4) = 0$

$i^2 = -1$
 $i^0 = 1 \quad i^3 = -i \quad (i^4)^k = 1$

FORMA TRIGONOMÉTRICA

$z = |z|e^{i\theta} \Rightarrow z = a + bi$
 $|z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$
 $z = a + bi \Rightarrow z = |z|e^{i\theta}$
 $\tan \theta = \frac{b}{a} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
 $\overline{|z|e^{i\theta}} = |z|e^{-i\theta}$
 $-|z|e^{i\theta} = |z|e^{i(\theta+\pi)}$
 $z_1 + z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\alpha_1+\beta)}$
 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\alpha-\beta)}$

$z = z_1 \Leftrightarrow |z| = |z_1| \wedge \theta = \theta_1 + 2K\pi, K \in \mathbb{Z}$

$z^n = |z|^n \times e^{in\theta}$

$z_k = \sqrt[n]{|w|} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2K\pi}{n})}, K \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

— raio $\sqrt[n]{|w|}$
 — polígono regular com n lados
 — $\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{2K\pi}{n}$



$\text{Arg}\left(\frac{z}{w}\right) = \text{Arg}(z) - \text{Arg}(w) / \text{Arg}(z) = \text{fix Angle}$

FORMA ALGÉBRICA

Circunferência: $|z - z_0| = R$
 — centro z_0
 — círculo R
 $|z - z_0| = R^2$

Mediatriz de seg. de reta: $|z - z_1| = |z - z_2|$
 — semiplano: $\rightarrow$ (induzi z_2)

Retas: $\text{Im}(z) = \text{Im}(z_1) = y$
 $\text{Re}(z) \neq \text{Re}(z_1) = x$

Semirreta: $\text{Arg}(z - z_0) = \theta$

FUNÇÕES

@WIK by Filipa

F.R.V.R. $(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$

Função

- Injetiva:** não há objetos diferentes com a mesma imagem (afim)
- Surjetiva:** o contradomínio = conj. chegada
- Bijetiva:** Injetiva + Surjetiva

$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$\forall y \in B, \exists x \in A: y = f(x)$

Função composta: $Df \circ g = \{x \in Dg: g(x) \in Df\}$

Para caracterizar uma função: expressão + domínio

Função

- Par:** $f(x) = f(-x)$
- Ímpar:** $-f(x) = f(-x)$

Transformações:

(y)

$g(x) = -a f(x) + d$

- sim. vertical (reflexão em OY)
- cont./dilat. vertical
- transl. vertical

(x)

$g(x) = f(-ax + c)$

- sim. horizontal (reflexão em OX)
- cont./dilat. horizontal
- transl. horizontal

[fator $\frac{1}{a}$]

$Dg = \{x: x \in Df\}$

Divisão de polinômios:

$\frac{D}{d} = q + \frac{R}{d}$

$\frac{5x^2 - 2}{2x + 1} = \frac{5}{2}x + \frac{-9}{2}$

Função limitada:

- $-m \leq M$
- $\forall x \in Df, m \leq f(x) \leq M$

Função contínua:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe

ou

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

se $a \in Df$

limites laterais

LIMITES

Ponto aderente a A: $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A \wedge \lim x_n = a$

$A = [-1, 3] \cup \{5\} \rightarrow$ pontos ader. a A: $[-1, 3] \cup \{5\}$

Definição de limite (segundo Heine):

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall (x_n) \in Df, \lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = b$

Teorema:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

g é limitada

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \times g(x)] = 0$

Funções compostas: $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \wedge \lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$

Indeterminações:

	$\infty - \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$
f. radicais	$x \pm$ por conjugado	x^2 em evid. Δ	$x \pm$ por conjugado
f. racionais	mesma fração (dominador)	termos de maior grau	fatorizar numerador e denominador

TEOREMA DE BOLZANO - CAUCHY:

- 1) Continuidade: (em $[a, b]$)
- 2) Imagens: $f(a)$ e $f(b)$
- 3) Enquadramento: $f(a) < n < f(b)$ ou Produto: $f(a) \times f(b) < 0$
- 4) Conclusão

F.E. e L.

$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$

$a^{x_1} \leq a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 \leq x_2$

$a^{\log_a x} = x$

$\log_a(a) = 1$

$\log_a(a^x) = x$

$y = \log_a x$

$D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$

$\log_a x_1 \leq \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 \leq x_2$ $n < 0$

$\log_a(x \times y) = \log_a x + \log_a y$

$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

$\log_a(x^k) = k \times \log_a(x)$

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n - 1}{n} = 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

FUNÇÃO AFIM $y = ax + b$

- $a \neq 0 \rightarrow$ não tem extremos
- $a = 0 \rightarrow b$ é máximo e mínimo



FUNÇÃO QUADRÁTICA $y = ax^2 + bx + c$

$h = -\frac{b}{2a}$ $f(x) = a(x-h)^2 + k$



$\Delta =$ binômio discriminante $V \rightarrow (h, k)$

$\Delta = b^2 - 4ac$

- $\Delta > 0 \rightarrow 2$ zeros
- $\Delta < 0 \rightarrow 1$ zero
- $\Delta = 0 \rightarrow$ sem zeros

FUNÇÃO MÓDULO $y = |x|$

$f(x) = a|x-b| + c$

$V \rightarrow (b, c)$



FUNÇÃO RACIONAL $y = \frac{A(x)}{B(x)}$

$\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \wedge B(x) \neq 0$

$D = \{x \in \mathbb{R}: B(x) \neq 0\}$

$\frac{x}{x-1}$

FUNÇÃO HOMOGRAFICA $y = \frac{ax+b}{cx+d}$



A.H: $y = \frac{a}{c}$

A.V: $y = -\frac{d}{c}$

Operações com funções contínuas $\Rightarrow$ Funções contínuas

- Funções polinomiais
- Funções racionais
- Funções irracionais
- Funções trigonométricas

ASSÍNTOTAS

não verticais

$(y = mx + b)$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$

$\rightarrow$ horizontais ($m = 0 \wedge b \in \mathbb{R}$)

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$

$\rightarrow$ oblíquas ($m \neq 0 \wedge b \in \mathbb{R}$)

$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] \in \mathbb{R}$

verticais

$(x = a)$

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$

ou e

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$

a é ponto conditório

DERIVADAS

$f.m.v. [a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

f é diferenciável em a

$\downarrow$

f é contínua em a

$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

declive da reta tangente ao gráfico de f em x_0

$f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}$

monotonia e convexidade

monotonia: $f' > 0 \rightarrow$ crescente, $f' < 0 \rightarrow$ decrescente

convexidade: $f'' > 0 \rightarrow$ côncava, $f'' < 0 \rightarrow$ convexa

$(u \pm v)' = u' \pm v'$ $(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(u \cdot v)' = u'v + u \cdot v'$ $(\log_a(u))' = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{\ln a}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u \cdot v'}{v^2}$ $(a^u)' = u \cdot a^{u-1} \cdot a'$

$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ $(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n \sqrt[n]{u^{n-1}}}$

$(f \circ g)'(u) = g'(u) \times f'(g(u))$